新物理学選書

巨視的トンネル現象

Macroscopic Quantum Tunneling

高木 伸 著

Shin Takagi

岩波書店

まえがき

トンネル現象は純粋に量子力学的な現象である．しかしトンネルという言葉自体は古典力学的色彩を帯びている．それは量子力学という土俵における一つの物の見方である．そして巨視的トンネル現象は，猫について想いを巡らすうえで欠くことのできない視点を与えてくれる[*1]．それは，猫を観念的思考の世界から実験の世界へ引きずり出して検証しようという視点であり，近年における実験技術の進歩によって現実的意味を持つようになったものである．

本書の想定する読者は，実験・理論を問わず，学部を終えたばかりの大学院生諸氏である．初等量子力学の知識のみを前提とし，巨視的トンネル現象とは何か，それを探索する意義は何か，概念的側面に重点を置いて全体像を概観する．体系化された理論を解説するのではなく，むしろ21世紀に向けて，物理学の一つの重要な小径に大学院生諸氏の興味をかき立てたい，それが本書執筆の意図である．理論の専門家向きの高踏的技巧に関する事項についてはおおむね他書に譲ることとし，使う言葉も物理数学(微細に拘泥しない直観的数学・論理)である．

文法　責任の所在を明確にするためには，「A は世間一般に **a** と呼ばれている」，「世間一般はいざ知らず本書で筆者は A を **a** と呼ぶ」などと書くべきであろう．冗長さを避けるため，これらをおのおの「A は **a** と呼ばれている」，「A を **a** と呼ぶ」と書く．つまり，受身の文章は世間一般に認められていることを表し，主語を伴わない述語(呼ぶ，名付けるなど)の主語は筆者である[*2]．

式も文章の一部とみなす．また，記述を簡潔にし多少の論理性を保つべく，

*1　“量子力学は遷移確率を計算する処方箋である”との立場を採るとすれば，トンネル現象も量子力学的遷移の一種に過ぎず，取り立てて論ずべき必然性はないであろう．しかし特定の視点に立って初めて見えてくることがらがある．物の見え方は，土俵自体を取り替えるという革新によって変わる(例えば，T. S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, 1962[中山茂訳: 科学革命の構造, みすず書房(1971)])のみならず，同じ土俵の上でも視点によって異なる．

*2　後者の内容は世間に通用するとは限らず，当然のことながら誤りもある．

記号 $:=$, $=:$, $\equiv$ を使う．$\equiv$ はその場かぎりの単なる言い替え，$:=$ と $=:$ は定義である*3．例えば

$$\hat{H}_S \equiv \text{巨視系の Hamiltonian} := \cdots$$

は「$\hat{H}_S$ とは巨視系の Hamiltonian のことであって，その定義は $\cdots$ である」という意味であり，

ここで $B := S[\mathcal{Q}]$ を用いると

とあれば「ここで，$B = S[\mathcal{Q}]$ によって定義される B を用いると」の意に解されたい．また

$$A =: B$$

という記法は「A をもって B の定義とする」という意味に使う．

「x は実数である」と書くのが面倒な場合には $x \in \mathbf{R}$ と記す．同じく自然数および複素数の集合をそれぞれ $\mathbf{N}, \mathbf{C}$ と書く*4．

用語　本書独自の用語には下線を付けた*5．例えば

場のこのような形を折曲(kink) と呼ぶ

という文章は「場のこのような形を本書で筆者は折曲 (おれまがり) と呼ぶ，英語では kink と呼ばれる」と読まれたい．また

このポテンシャルをたんこぶ坂 (bumpy slope) と呼ぶ

は「このポテンシャルを本書で筆者はたんこぶ坂と呼ぶ，英訳すれば bumpy slope とでもなろう」と読まれたい．見慣れない奇怪な語句が登場したら，言葉の本来の機能に鑑み記号の一種と了解されたい．

謝辞

本書は東北大学および幾つかの大学における講義の内容がもとになっている．集中講義にお招き下さったお茶の水女子大学・京都大学・筑波大学・大阪市立大学・名古屋大学の皆さん，熱心に講義を聴いて質問をして下さった院生諸氏，そして東北大学で修士・博士論文の指導を通じて逆に多くを教えられた

---

*3　もっとも言い替えと定義の区別は必ずしも定かでない．

*4　自然数には 0 を含める．

*5　これら用語は必ずしも人口に膾炙したものでも学界公認用語(培風館物理学辞典・岩波理化学辞典・岩波数学辞典などに登録された用語)でもない．

山田徳史・桧山薫・平岡太一・鈴木重任・中村卓史・菅野雄介・磯崎隆司・山本由広の諸君に感謝したい．これら諸君との共同研究の内容は本書随所に引用させていただいた．また，**A. J. Leggett** 教授による長年の薫陶なくして本書の執筆は考えられない．執筆開始にあたり幾つかの基礎的質問に丁寧に答えていただいたことも含め，改めて教授にお礼申し上げたい．最後に，執筆の機会を与えて下さった長岡洋介・吉川圭二両教授，および出版に際し多大の労をとっていただいた岩波書店の宮部信明氏にも感謝したい．

目　次

まえがき ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ v

1　序　論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

1.1　猫とお月さん ・・・・・・・・・・・・・・・ 1

1.2　Leggett 構想 ・・・・・・・・・・・・・・・ 4

1.3　巨視的の意味 ・・・・・・・・・・・・・・・ 6

1.3.1　直観的考察 ・・・・・・・・・・・・・・・ 6

1.3.2　猫 性 度 ・・・・・・・・・・・・・・・ 8

1.4　巨視的トンネル現象 ・・・・・・・・・・・・ 10

1.4.1　Leggett 構想と巨視的トンネル現象 ・・・・・・ 10

1.4.2　巨視的トンネル現象の分類：MQC と MQT ・・・・ 14

演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 17

2　巨視的トンネル現象概観 ・・・・・・・・・・・・ 19

2.1　Hamiltonian と Schrödinger 方程式の標準形：次元解析 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 19

2.2　MQC 概観 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 23

2.3　MQT 概観 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 28

2.4　基底エネルギー分裂と崩壊率の公式 ・・・・・・・ 32

2.5　量子崩壊現象と不可逆過程 ・・・・・・・・・・ 35

2.6　Euclid 作用：跳返と瞬子 ・・・・・・・・・・ 37

演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 41

3　巨視的トンネル現象候補系 ・・・・・・・・・・・ 43

3.1　SQUID ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 43

3.1.1　Josephson 接合と SQUID の等価回路 ・・・・・・・ 44
3.1.2　位相差と磁束 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 46
3.1.3　磁束の運動方程式 ・・・・・・・・・・・・・・・ 48
3.1.4　素朴量子論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 50
3.1.5　摩擦係数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 54

3.2　^{3}He$-^4$He 混合液 ・・・・・・・・・・・・・・・ 55
3.2.1　^{3}He$-^4$He 混合液における相分離現象 ・・・・・・ 55
3.2.2　Rayleigh-Plesset 模型 ・・・・・・・・・・・・・ 58
3.2.3　素朴量子論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 60
3.2.4　核形成の場の理論 ・・・・・・・・・・・・・・・ 64

3.3　単磁区磁石 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 75
3.3.1　素朴量子論 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 77
3.3.2　経度基底系と経度表現波動函数 ・・・・・・・・・ 80
3.3.3　スピン演算子の経度表現 ・・・・・・・・・・・・ 85
3.3.4　対称性と干渉効果 ・・・・・・・・・・・・・・・ 90

演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 93

4　気楽な環境問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 97

4.1　干渉性とその消失 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 97
4.2　MQC における干渉性消失の一般論 ・・・・・・・ 98
4.3　散逸性環境 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 105
4.4　非散逸性環境 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 109
4.5　量子 Zeno 効果 ・・・・・・・・・・・・・・・・・ 113
演習問題 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 117

5　調和環境 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 119

5.1　線形相互作用調和環境模型 ・・・・・・・・・・・ 119
5.2　Heisenberg 運動方程式，その 1 ・・・・・・・・・ 122
5.3　環境周波数分布函数 ・・・・・・・・・・・・・・・ 125
5.4　遅延抵抗函数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 127
5.5　Heisenberg 運動方程式，その 2 ・・・・・・・・・ 129

5.6　古典領域における運動方程式 · · · · · · · · · · 130
演習問題 · 134

6　調和環境中の量子共鳴振動 · · · · · · · · · 137
6.1　摂動論に関する予備的考察 · · · · · · · · · · · 137
6.2　時間発展の摂動論 · · · · · · · · · · · · · · 142
6.3　巨視的量子共鳴振動 · · · · · · · · · · · · · 147
6.4　量子共鳴周波数の見積もり · · · · · · · · · · · 151
演習問題 · 153

7　調和環境中の量子崩壊 · · · · · · · · · · · · 155
7.1　崩壊率についての予想 · · · · · · · · · · · · · 155
7.2　Euclid 作用汎函数と跳返 · · · · · · · · · · · 156
7.2.1　有効 Euclid 作用汎函数と停留点 · · · · · · · 157
7.2.2　調和環境模型における有効 Euclid 作用汎函数 · · · 158
7.3　双一次模型における跳返と崩壊率 · · · · · · · · 161
7.4　有限温度における崩壊率について · · · · · · · · 163
演習問題 · 164

8　一般的環境と調和環境 · · · · · · · · · · · · 165
8.1　Born-Oppenheimer 型基底系 · · · · · · · · · · 165
8.2　Hamiltonian の Born-Oppenheimer 型表現 · · · 168
8.3　Caldeira-Leggett 仮定 · · · · · · · · · · · · · 170
演習問題 · 174

9　月夜の猫 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 175
9.1　巨視的実在論 · · · · · · · · · · · · · · · · · 175
9.2　Leggett-Garg 不等式 · · · · · · · · · · · · · · 176
9.3　実測可能な相関函数 · · · · · · · · · · · · · · 179
9.4　量子力学的相関函数 · · · · · · · · · · · · · · 180

9.5 Leggett-Garg 不等式を試す思考実験 · · · · · · · 182
9.6 結　　語 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 189
演習問題 · 190

付録 A Euclid 空間と Hilbert 空間 · · · · · · · 193
A.1 3 次元 Euclid 空間 · · · · · · · · · · · · · · 193
A.2 Hilbert 空間 · · · · · · · · · · · · · · · · · 193

付録 B 単一自由度系における準基底状態とその崩壊 · · · · · · · · · · · · · · · · 195
B.1 エネルギー固有函数 · · · · · · · · · · · · · · 195
B.2 準定常波 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 197
B.3 共鳴と準束縛状態 · · · · · · · · · · · · · · · 199
B.4 準基底状態の崩壊 · · · · · · · · · · · · · · · 200

付録 C 汎函数微分 · · · · · · · · · · · · · · · 201

付録 D スピンを巡る断章 · · · · · · · · · · · · 205
D.1 スピン演算子 · · · · · · · · · · · · · · · · · 205
D.2 スピン S のスピン 1/2 分解 · · · · · · · · · 206
D.3 スピン解縺定理 · · · · · · · · · · · · · · · · 208
D.4 スピン・コヒーレント状態 · · · · · · · · · · · 210

あとがき(筆者独白) · · · · · · · · · · · · · · · 215
参考文献 · 217
索　　引 · 219

1 序　論

巨視的量子現象とは何か，その意味と巨視的量子現象探索の意義について概観し，巨視的トンネル現象の位置付けを試みる．

1.1 猫とお月さん

Young 型の干渉実験については改めて説明するまでもなかろう．今日では電子・中性子などに限らず，He, Ne, Na といった原子についても Young 型実験が実現されている．ある決まった運動エネルギーの粒子が 1 個発射される度に，二連間隙 (double slit) を隔てて一面に並べられた粒子検出器 (counter) のどれか一つだけが光る．次々に粒子が発射されて輝点の個数が増すにつれ，輝点群が次第に滑らかな縞模様となって浮かび上がってくる．この実験を撮った映画は何度観ても新鮮であり一種感動的でさえある．最近の実験技術の進展からして，今後どの程度の大きさの“もの”まで Young 型実験が実現されるか，興味津々である．とある国際集会で耳にした，Weizsäcker*1 と Glauber*2 の対話を紹介しておこう．

W: いかに技術が進歩しても，テニスボールで行うのは不可能でしょう．

G: でも，サッカーボール*3 でなら可能かもしれませんよ．

量子力学 (quantum mechanics)*4 の基礎方程式は，系の状態の時間変動を記

*1 C. F. von Weizsäcker. 原子核などの研究で知られる理論物理学者 (ドイツの前大統領の弟).

*2 R. J. Glauber. 量子光学などの研究で知られる理論物理学者.

*3 60 個の炭素原子からなる籠型分子 (C_{60}) は，その形状から“サッカーボール”と通称される.

*4 場の量子論まで含めて量子力学という.

述するSchrödinger方程式[*5]であり，その最も重要な性質は線形性である．時刻tにおける系の状態(以下，特に断らない限り，状態とは量子力学的状態を指す)を$|\Psi(t)\rangle$とすれば，Schrödinger方程式(の積分形)は一般に次の形に書かれる．

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle \ . \tag{1.1.1}$$

右辺の$\hat{U}(t)$は系のHamiltonian $\hat{H}$に応じて与えられるユニタリー演算子である．しかし，ここでは線形な黒函(black box)と了解しておけば充分である．すなわち，時刻0での状態が指定されれば，任意の時刻tにおける状態が上式によって一意的に決定され，かつ，勝手な状態$|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$と任意のtに対して

$$\hat{U}(t)(|\Psi_1\rangle + |\Psi_2\rangle) = \hat{U}(t)|\Psi_1\rangle + \hat{U}(t)|\Psi_2\rangle \ . \tag{1.1.2}$$

上述のYoung型実験をはじめ，種々の実験で検出されている干渉効果は，この線形性を支持するものである．

さて，微視的な世界[*6]においては，例えばスピン上向き状態と下向き状態の重ね合わせなど，種々の線形結合状態が確認されているが，これらは，上述の線形性によれば，巨視的な世界へと拡大され得る．その拡大の一機構がSchrödingerの線形劇場であり，以下は原作の簡略版である．舞台には猫の入った箱が置かれ，これに放射性原子核が飛来して猫に吸い込まれるように仕掛けしてある．吸い込まれた直後(時刻0)の原子核の状態として，$|\phi_\pm\rangle$という二通りの可能性がある．$|\phi_+\rangle$は原子核が崩壊していない状態，$|\phi_-\rangle$は崩壊した状態である．時刻0における原子核の状態が$|\phi_+\rangle$であれば猫は害を受けないが，もし$|\phi_-\rangle$であると猫の体内の細胞に異変が誘発され猫は死亡する．時刻0における猫の状態を$|\psi\rangle$とし，$|\phi_+\rangle$状態の原子核を吸い込んで元気な猫の状態を$|\Psi_+\rangle$，$|\phi_-\rangle$状態の原子核を吸い込んで死亡した猫の状態を$|\Psi_-\rangle$とする．ただし，これら$|\Psi_\pm\rangle$は劇の閉幕時刻Tにおける全系(すなわち原子核と猫を合わせた系)の状態である．

$$|\Psi_\pm\rangle := \hat{U}(T)|\psi, \phi_\pm\rangle \ , \quad |\psi, \phi_\pm\rangle \equiv |\psi\rangle|\phi_\pm\rangle \ . \tag{1.1.3}$$

以上が舞台設定である．さて，実際に幕が開いたとき，原子核の初期状態は

---

*5　Schrödinger方程式というと“$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$”を想起される読者もあるかもしれないが，これは“$|\Psi\rangle$が定常状態”という特別な場合に限ったSchrödinger方程式である．

*6　種々の現象の総体を曖昧に世界と称する．

$|\phi_{\pm}\rangle$ のいずれかではなく，その線形結合 $|\phi_+\rangle+|\phi_-\rangle$ となるように[*7]準備してあるものとする．つまり全系の初期状態は

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi\rangle(|\phi_+\rangle+|\phi_-\rangle) = |\psi,\phi_+\rangle+|\psi,\phi_-\rangle\ . \tag{1.1.4}$$

これと (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) を組み合わせると，時刻 T における状態は

$$|\Psi(T)\rangle = \hat{U}(T)(|\psi,\phi_+\rangle+|\psi,\phi_-\rangle) = |\Psi_+\rangle+|\Psi_-\rangle\ . \tag{1.1.5}$$

この式は，線形結合が微視的世界 $(|\phi_+\rangle+|\phi_-\rangle)$ から巨視的世界 $(|\Psi_+\rangle+|\Psi_-\rangle)$ へと拡大され得ることを表している．

MMM: Magnification {Microscopic ⟶ Macroscopic}

状態 $|\Psi(T)\rangle$ は，猫が生きている $(|\Psi_+\rangle)$ とも死んでいる $(|\Psi_-\rangle)$ ともつかない，両者の線形結合であり，あえて言葉にすれば $|\Psi_+\rangle$ AND $|\Psi_-\rangle$ である．

明確に異なる二つの状態（上例では $|\phi_{\pm}\rangle$）の線形結合が微視的世界で実験的に確認されている以上，Schrödinger 方程式の線形性を認める限り，(1.1.5)のような**巨視的線形結合** (macroscopic linear combination) が生ずることは避けられない．巨視的線形結合とは，**巨視的可峻別**[*8](macroscopically distinct) な二つの状態の線形結合である．しかし，このような奇妙な状態は**巨視的実在論**[*9] (macrorealism) と相容れない．"放射線に曝された猫は必ず $|\Psi_+\rangle$ または $|\Psi_-\rangle$ のいずれかの状態にいるはず ($|\Psi_+\rangle$ OR $|\Psi_-\rangle$)" というのが巨視的実在論の考えである．この考えからすると，$|\Psi_+\rangle$ AND $|\Psi_-\rangle$ なる状態にいるなどというのは理解不能である[*10]．

Einstein は，とある散歩の折，月を引き合いに出してこう言ったと伝えられる[*11]．"貴方は本当にそう信じますか，お月さんは貴方が観ているときにのみ実在する，と．" 量子力学の AND から巨視的実在論の OR への移行

*7 放射性原子核の状態は，もともと $|\phi_+\rangle$ であったとしても，時間が経つにつれて，このような線形結合となる．

*8 巨視的に明晰に区別可能の意．

*9 すなわち，通常の素朴な認識論．

*10 Schrödinger の言葉（の英訳）を借りれば ridiculous である．彼はそれを揶揄して，猫に "どうかお許しを(… the living and the dead cat (pardon the expression) …)" と断った上で，あの寸劇を創作したのであった．

*11 この会話は，必ずしも巨視的世界の問題に限ったことではなかったかもしれないが，巨視的実在論を代弁するにふさわしい．なお，A. Pais, *'Subtle is the Lord...' The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press (1982) [西島和彦監訳，神は老獪にして … アインシュタインの人と学問，産業図書 (1987)] 参照．

TAO:　Transition {AND ⟶ OR}

これが核心*12である．猫を測定器で置き換えれば“量子力学における観測の問題”となり，永年にわたって議論されてきた問題である．

なお，状態 (1.1.5) は，原子核の状態と猫の状態の単なる積ではなく，両者の積の線形結合である．そこでは両者は明確に分けられず，いわば絡み合い縺れている．このような状態を一般に**縺状態***13(entangled state) と呼ぶ(詳しくは第 4 章)．

1.2 Leggett 構想

“観測問題”という言葉には観念的色彩を感じられる読者もあるかもしれない．以下では，それを実証的視点から眺め直してみる．そもそもこの問題は，“量子力学は巨視的世界においても普遍的妥当性を有する”との前提から生じたものである．しかしこの前提は実証的根拠を欠く．もし前提が崩れれば問題は消滅する(もしくは全く形を変える)はずである．仮にこの前提が正しくて巨視的線形結合が存在したとすれば，**巨視的可峻別な二状態間の干渉効果**(**QIMDS**: quantum interference of macroscopically distinct states)が期待される．いったい，どの程度に巨視的な世界にいたるまで QIMDS が検出され，巨視的線形結合が裏付けられ得るであろうか．QIMDS に対しては伝統的に否定的な考え方がある．それは，

仮に量子力学が巨視的世界においても妥当であるとしても，
QIMDS は事実上検出不可能

と論ずるものである*14．その論拠はこうである．

巨視系の自由度が大きいことを反映して，QIMDS は実は多数の干渉効果を足しあげたものである．たとえ個々の干渉効果が Young 型干渉実験における縞模様のような整然としたもので表されたとしても，一般にそれぞ

---

*12 Collapse, Objectification, REalization など (まとめて CORE) とも呼ばれる．

*13 もつれじょうたい

*14 これに続いて，“したがって，AND は**事実上**(For All Practical Purposes) OR と同じである”と論じられることが多いが，以下に述べる通り，このような **FAPP 議論**によって TAO 問題が解消するわけではない．

れの位相(縞の位置)が少しずつずれているため，足しあげの結果，縞模様は消失するであろう．前節の話では，“原子核と猫を合わせた系”を全系と称したが，本当は“原子核と猫とその周りの環境を合わせた系”を全系と考えるべきである．したがって，自由度は事実上無限に大きく，縞模様の消失は確実である．

これは，**環境**[*15]による<u>**干渉性消失**</u>(decoherence)と呼ばれる[*16]．確かに，現実の猫をはじめ多くの場合，その通りかもしれない．しかし，微視と巨視の間に画然たる境界がない以上，量子力学が妥当である限り，相当巨視的な世界においても QIMDS が検出される可能性は残るのではなかろうか．たとえ環境の自由度が形式的に無限大であっても，適切な(例えば充分低温にするなどの)制御により，QIMDS に影響を及ぼし得る実質的環境の自由度を抑えることが不可能とは言い切れまい．

以上のような考えから，次のような研究構想が Leggett により提唱された(以下，QM ≡ 量子力学，MR ≡ 巨視的実在論)．

(0) 環境を制御することにより，“QM が妥当ならば QIMDS の関与が確認できるはず”と考えられる巨視的現象を，実験的理論的に探索する．

(1-0) もし実験結果が，それを QM に基づいて解釈したとして，QIMDS を検出したものとみなされるならば，手順(2)に進む．

(1-1) もし QM の予言に反して QIMDS が検出されなければ，当該の巨視性の水準で QM が破綻していることになる．そうなったら，この実験結果を手がかりとして QM を修正する．

(2) 実験結果が，QM に基づく解釈とは独立に，MR と矛盾するかどうかを検証する．

(2-0) もし矛盾が実証されなければ，この実験は，QM 対 MR という対立に黒白を決するだけの精度を有しない．その場合には手順(0)に戻り，実験と理論の緻密化を図る．

---

*15 対象とする巨視系(例えば猫)の多数の内部自由度(生死を区別する以外の自由度)も，ここにいう環境に含まれる．

*16 もちろん，微視的に異なる二状態間の干渉も，環境による干渉性消失を蒙り得る．“QIMDS の場合には，それが不可避かつ致命的である”というのが伝統的立場の趣旨である．

(2-1)　もし矛盾したとすれば，当該の巨視性の水準においてはMRは不成立でQMが妥当，ということになる．この場合にも手順(0)に戻り，より巨視的な系へとQIMDS探索を続行する．

手順(2)について敷衍しておこう．QMの予言する巨視的線形結合を“気分の悪いもの”と感じても，それだけなら主観的問題であり，いかに弁舌を奮おうとも観念論として退けられかねない．ところが，MRの立場に立つと，ある種の測定可能量(時間相関函数)の満たすべき不等式(Leggett-Garg 不等式*17)を導くことができる．一方，QMの予言はこの不等式を破る場合がある．精妙な実験を遂行すれば，この齟齬を検出できるはずである．つまり，QMとMRの相克に実験的決着をつけることが可能である(第9章)．

この構想には

巨視性が一定の水準に達すると量子力学が破れるのではないか

との期待*18が秘められている．しかし研究内容自体は，そのような期待から，あるいは量子力学は絶対に正しいといった信条からも中立であり，量子力学の側から見れば，その適用妥当領域を微視的世界から巨視的世界へと実証的に拡張していこうというものである．この研究構想を**Leggett 構想**(Leggett Program*19) と呼ぶ．

1.3　巨視的の意味

1.3.1　直観的考察

巨視的 (macroscopic) という言葉を頻繁に使ってきたが，これは常に物議を醸す言葉でもあるので，その意味を明確にしておく必要がある．例えばYoung

*17　この不等式は，量子力学と局所実在論 (Local Realism) の相克 (Einstein-Podolsky-Rosen の問題) における Bell の不等式に対応し，数学的形式は後者と同様である．

*18　A. J. Leggett, *The Problems of Physics*, Oxford University Press (1987) ［邦訳：物理学のすすめ，紀伊國屋書店 (1990)］, Chap. 5, Skeletons in the cupboard.

*19　“Felix Klein(1849-1925) が1872年に Erlangen 大学教授就任の際に提出した目録(Programm)は幾何学の綜合に画期的卓見を示し，永く指導的役割を演じた(岩波数学辞典増訂版 (1966), p. 80).” 有名な “Klein の Erlanger Programm (Erlangen Program)” である．Leggett Program はまだ緒についたばかりであるが，来世紀中葉になって振り返ってみれば，今世紀の数学における Klein Program に匹敵する役割を物理学において演じたと評価されるのではなかろうか．

型実験において，上下二つの間隙が巨視的な距離（例えば 0.1 mm）だけ隔たっていたとするならば，たとえ系が電子や中性子のような微視的なものであっても，上間隙を通った状態と下間隙を通った状態とは互いに巨視的に異なる，といえないことはない．しかし，これは単に空間的尺度が巨視的なのであって，現象に関与する粒子は 1 個である．これに対し，本書で言う巨視的とは次の意味である．

関与する粒子の個数が多い，より正確には，

関与する**力学的自由度の個数** N が大きい．

力学的自由度の個数という言葉にも注意を要する．例えば，壁に打ち当てられたテニスボールが，ひしゃげることもなくするりと壁を通過したとしよう．これを巨視的トンネル現象と呼ぶことに対して異存はなかろう．ボールを原子の集団とみなせば，ボールを構成する原子の個数程度の自由度が関与しているからである．ところが，この現象を記述するには，ボールの重心位置という一つの自由度で事足りる．それゆえ，巨視性の目安として力学的自由度の個数を採用することに対しては，“これは変数変換に対して不変でないから目安としての用をなさない”という反論が考えられる．ボールの並進運動を記述するのに，重心位置をもってするか，個々の原子の位置をもってするか，これは単に力学変数の変換の問題であり，どちらの記述法を採るかによって結論が変わっては困る，という意見である．もっともな見解とも思われるが，それに対する回答はこうである．ボールのトンネル現象を巨視的と考える大方の直感は，重心位置のような**集団自由度** (collective degrees of freedom) の個数でなく，多数の構成粒子の位置という**微視的自由度**の個数に基づいている．後者は，いわば自由度を<u>民主的に</u>数える立場であり，前者は，本来互いに同等な多数の微視的自由度を，少数の<u>選民自由度</u>とそれ以外の<u>大衆自由度</u>に選り分け，選民自由度だけに着目するという立場である．つまり，巨視性の目安としては，民主的に数えた自由度の個数（たいていの場合，構成粒子数）を採る，それが巨視的という言葉の直感的意味と合っている．したがって，この目安が“力学変数の変換に対して不変でない”ということは何ら問題にはならない．むろん，構成粒子数は基本粒子の採り方によって変わる．例えば中性子 1 個は，クォークでいえば 3 個である．しかし N と $3N$ の違いなどを気にしても始まらない．巨視性の目

安とはその程度のものであろう．

1.3.2 猫 性 度

1970 年代以前には，巨視的量子現象という言葉は超流動・超伝導の代名詞として使われていた．例えば，コップ内の液体 He がコップの壁をよじ登ってするすると流れ出るといった現象は疑いもなく巨視的であり，かつ量子力学によってのみ説明可能である．しかし，これらは

1（もしくは 2）粒子の世界での干渉効果が，

多数の粒子（もしくは粒子対）が歩調を揃えて振る舞うことにより，

巨視的な尺度に拡大された結果として生ずる現象

であって，そこには QIMDS の関与はない．今日では，これは**第一種巨視的量子現象**と呼ばれることがあり，これと区別すべく，QIMDS の関与する現象は**第二種巨視的量子現象**と称されることもある．

両者の違いについて，より詳しく説明しておこう．まず，第一種巨視的量子現象の典型として，コップから流れ出る超流動液体 ^{4}He を考える．その状態を表す波動函数は，概念的に次の形をしている．

$$\prod_{k=1}^{N}\{\psi(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{d}/2)+\psi(\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{d}/2)\}\ . \tag{1.3.1}$$

ただし，液体 ^{4}He は N 個の原子からなるとし，$\boldsymbol{r}_k$ は k 番目の原子の位置，$\boldsymbol{d}/2$ はコップの中心，$-\boldsymbol{d}/2$ はコップの外の地点を表す（図 1.1）．各原子は $\psi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{d}/2)+\psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{d}/2)$ という線形結合の状態にある．(1.3.1) はそれらの単純な積であって，すべての粒子が同一の “1 粒子状態” にあることを表す．これすなわち **Bose-Einstein 凝縮** (Bose-Einstein condensation) であり，多数の原子が歩調を揃えてといったのはこのことである．

一方，第二種巨視的量子現象の代表はもちろん猫である．ただし，Schrödinger にならって猫といってきたものの[*20]猫の生死を表す量子状態などというものはよく分からないので，代わりに二連間隙を通過するボールを考えてみよう．そ

---

*20　彼がなぜ，例えば犬でなく，猫を引き合いに出したのか，今のところ不明であるが，Schrödinger の猫は Carroll の猫（不思議議の国の Alice）にも通じ，何となく得体の知れぬ感じを出すには確かに猫がふさわしかろう．

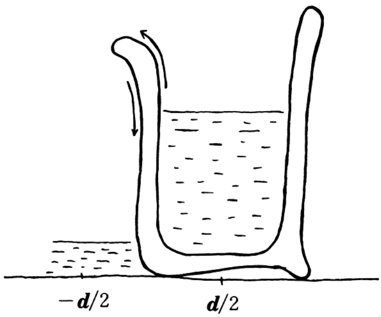


図 1.1　コップから流れ出る超流動 ^{4}He(第一種巨視的量子現象)

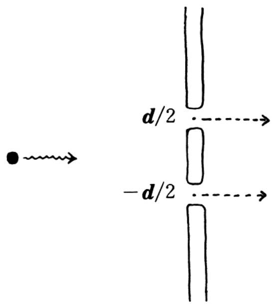


図 1.2　二連間隙を通過するボール(MQP)

の状態を表す波動函数の概念的な形は

$$\prod_{k=1}^{N} \psi_k(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{d}/2) + \prod_{k=1}^{N} \psi_k(\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{d}/2) \ . \qquad (1.3.2)$$

ただし，ボールは剛体として振る舞い，その形は変形しないものとした．$\boldsymbol{r}_k$ は，ボールを構成する N 個の原子のうち，$\boldsymbol{k}$ 番目の原子の位置，$\pm\boldsymbol{d}/2$ は上下間隙の位置である．第 1 項はボールの中心が $\boldsymbol{d}/2$ 付近にある状態，第 2 項は $-\boldsymbol{d}/2$ 付近にある状態を表す(図 1.2)．

式 (1.3.2) においては，原子ごとにボール内部での位置が違うことを考慮して ψ にも添字 $\boldsymbol{k}$ を付しておいた．しかしこれは (1.3.1) と (1.3.2) を対比する際に本質的なことではない．重要なのは和(線形結合)と積の順序であって，<u>まず和そして積</u>が (1.3.1)，これに対し (1.3.2) は<u>まず積そして和</u>，ここが決

定的に違うのである.

以下，第二種巨視的量子現象を単に**巨視的量子現象** (MQP: macroscopic quantum phenomenon) と呼ぶ．当該の現象が，MQP の意味でどの程度に巨視的であるか，その数値的目安を具体的に与えられるに越したことはない．そのような目安として提案されたのが**猫性度**[*21]である．これを $\boldsymbol{D}$ で表す．そのおよその定義は

既約な線形結合に関与する民主的自由度の最大個数

である[*22]．例えば状態 (1.3.1) については $\boldsymbol{D}\sim 1$，状態 (1.3.2) については $\boldsymbol{D}\sim N$ である．$\boldsymbol{D}$ が大きいほど，当該の QIMDS は猫に近くなり，その検出は困難を増すことになろう.

1.4 巨視的トンネル現象

1.4.1 Leggett 構想と巨視的トンネル現象

すでに述べたように，QIMDS の検出可能性に対しては伝統的に否定的見解が存在する．これをもう少し詳しく説明しておこう．話を簡単にするために，大きさ 1/2 のスピン N 個 $\{\hat{\boldsymbol{s}}^{(1)}, \hat{\boldsymbol{s}}^{(2)}, \cdots, \hat{\boldsymbol{s}}^{(N)}\}$ からなる系を想定し，それが次の状態 $|\Psi\rangle$ にあったとする（スピンに関する記法は付録 D 参照）.

$$|\Psi\rangle := c_+|\Psi_+\rangle + c_-|\Psi_-\rangle \,, \tag{1.4.1}$$

$$|\Psi_\pm\rangle \equiv \prod_{k=1}^{N} \left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle^{(k)} , \quad |c_+|^2 + |c_-|^2 = 1 \,. \tag{1.4.2}$$

ただし

$$\hat{s}_3^{(k)}\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle^{(k)} = \pm\frac{1}{2}\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle^{(k)} . \tag{1.4.3}$$

$|\Psi\rangle$ は (1.3.2) と同じく $\boldsymbol{D}\sim N$ の状態である．この線形結合を検出するにはどうすればよいであろうか.

準備として Young 型実験を振り返ってみよう．粒子がいずれかの検出器に入

---

*21　当初これは disconnectivity と呼ばれたが，その後，cattiness とも呼ばれている．より正確を期せば scattiness となろう（頭文字は Schrödinger の S）.

*22　既約とは因数分解できないの意.

れば，その検出器が光る．ある特定の検出器(その中心位置を $\boldsymbol{x}_0$，それの占める空間領域を $C(\boldsymbol{x}_0)$ とする)が時刻 T に光る確率 $P(\boldsymbol{x}_0)$ は，およそ

$$P(\boldsymbol{x}_0) = \int_{C(\boldsymbol{x}_0)} d\boldsymbol{x}\ |\psi(\boldsymbol{x})|^2\ , \quad \psi(\boldsymbol{x}) \equiv \langle \boldsymbol{x}|\psi\rangle\ . \tag{1.4.4}$$

ただし $|\psi\rangle$ は時刻 T における粒子の状態であり，それは上下それぞれの間隙を通ってきた状態 $|\psi_\pm\rangle$ の重ね合わせである．

$$|\psi\rangle = |\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle\ . \tag{1.4.5}$$

領域 $C(\boldsymbol{x}_0)$ への**射影子** (projector*[23])

$$\hat{\Pi}_{\boldsymbol{x}_0} := \int_{C(\boldsymbol{x}_0)} d\boldsymbol{x}\ |\boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{x}| \tag{1.4.6}$$

を使えば

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{x}_0) &= \langle\psi|\hat{\Pi}_{\boldsymbol{x}_0}|\psi\rangle \\ &= \langle\psi_+|\hat{\Pi}_{\boldsymbol{x}_0}|\psi_+\rangle + \langle\psi_-|\hat{\Pi}_{\boldsymbol{x}_0}|\psi_-\rangle + 2\Re\langle\psi_+|\hat{\Pi}_{\boldsymbol{x}_0}|\psi_-\rangle\ . \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

これは周知のことを厳めしく言い換えたに過ぎず，右辺第 3 項が干渉項である．

$$\langle\psi_+|\hat{\Pi}_{\boldsymbol{x}_0}|\psi_-\rangle = \int_{C(\boldsymbol{x}_0)} d\boldsymbol{x}\ \psi_+^*(\boldsymbol{x})\psi_-(\boldsymbol{x})\ , \quad \psi_\pm(\boldsymbol{x}) \equiv \langle\boldsymbol{x}|\psi_\pm\rangle\ . \tag{1.4.8}$$

この考察から以下の教訓を得る．

検出操作に対応する演算子 $\hat{\Pi}_{\boldsymbol{x}_0}$ が存在し，かつ，

その非対角要素 (1.4.8) が 0 でない．

この事情により，Young 型干渉効果の検出が可能となったわけである．

したがって，状態 (1.4.1) における $|\Psi_\pm\rangle$ の間の干渉効果が検出されるためには以下の条件が必要である．

現実の測定操作に対応する演算子 $\hat{O}$ が存在し，$\langle\Psi_+|\hat{O}|\Psi_-\rangle \neq 0$. (1.4.9)

このような演算子が存在しなければ，状態 (1.4.1) は下記の密度演算子 $\hat{\rho}$ で表される**混合** (mixture)*[24] と区別され得ない．

---

*23 projection operator の略称．

*24 これが "混合状態 (mixed state)" と呼ばれ，それに対して量子力学的状態が "純粋状態 (pure state)" と呼ばれることもある．しかし混合状態というと，この混合を "mixing angle" や "s-p mixing" などの "mixing" と混同して混乱状態に陥る危険性がある．後者は線形結合を意味しており，例えば "s-p-mixed state" は純粋状態である．

$$\hat{\rho} = |c_+|^2|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + |c_-|^2|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| \,. \qquad (1.4.10)$$

例えば，演算子 $\hat{O} \equiv \hat{s}_1^{(1)}\hat{s}_1^{(2)}$ で表される物理量を測定しても，所望の干渉効果を見ることはできない．

$$\langle\Psi_+|\hat{O}|\Psi_-\rangle = \prod_{k=1}^{2}{}^{(k)}\left\langle\frac{1}{2}\right|\hat{s}_1^{(k)}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle^{(k)}\prod_{k=3}^{N}{}^{(k)}\left\langle\frac{1}{2}\middle|-\frac{1}{2}\right\rangle^{(k)} = 0 \,. \qquad (1.4.11)$$

同じく，N 個のスピンのうちの $N-1$ 個以下の積で与えられる演算子では駄目であり，N 個すべての積を用意して初めて可能となる．仮に $N \sim 10^{10}$ とすれば，これは途方もないことである．

この意見に反論することは不可能にみえる．しかし幸いなことに，いかなる系にも必ず時間発展演算子 $\hat{U}(t)$ が備わっている．この演算子は Hamiltonian $\hat{H}$ を無限次まで含み，かつ $\hat{H}$ にはすべての自由度が含まれる．したがって，たとえ $\hat{O}$ が少数個の演算子の積に過ぎなくても

$$\hat{O}(t) \equiv \hat{U}^\dagger(t)\hat{O}\hat{U}(t) \qquad (1.4.12)$$

に対しては

$$\langle\Psi_+|\hat{O}(t)|\Psi_-\rangle = \langle\Psi_+(t)|\hat{O}|\Psi_-(t)\rangle \neq 0\,, \quad |\Psi_\pm(t)\rangle \equiv \hat{U}(t)|\Psi_\pm\rangle \qquad (1.4.13)$$

となり得る．つまり，上記の条件を満たす演算子は，実験家が人為的にしつらえなくても自然が用意してくれる．直接に状態 $|\Psi_\pm\rangle$ に関して $\hat{O}$ を測定する代わりに，状態 $|\Psi_\pm(t)\rangle$ に関して $\hat{O}$ を測定すればよいのである．これを利用しない手はないし，QIMDS を検出できるとすればこれが唯一の方策であろう．ただし，$|\Psi_+\rangle$ と $|\Psi_-\rangle$ が巨視的に可峻別でなければ，そもそも議論にならない．そのためには，両者が充分に高いポテンシャル障壁で隔てられていて，それぞれが明確に同定できればよかろう．つまり，トンネル現象の起こり得る状況を設定すればよい．

こうして，本書の標題である巨視的トンネル現象が Leggett 構想において必須の位置を占めることとなる．繰り返しになるが，トンネル現象を持ち出した理由は次の 2 点*25にある（もちろん，この 2 点は密接に関連している）．

・現象の純量子性：量子力学的効果はいかなる現象にも含まれているが，そ

*25　MQP としてはこの 2 点が満たされればよく，必ずしもトンネル効果を伴う必要はない．そのような候補として，光（電磁場）のコヒーレント状態を二つ重ね合わせることなども提案されている．

れを探すには，古典的にも可能な現象を精査するよりも，古典的対応のない現象を調べる方が明快である．トンネル現象はその典型である．

・巨視的可峻別性：トンネル効果によって結ばれる二つの状態は，古典的には互いに移行できない．それゆえ両者は巨視的に可峻別であることが保証される．

一つ処理しておくことがある．それは，“そもそも巨視的な系においてトンネル現象は検出し得ない”という見解である．その論拠はおよそ以下のようにまとめられる*26．

一般にトンネル確率は $\exp(-2S/\hbar)$ に比例する．ただし S は当該のトンネル現象を特徴付ける作用積分の大きさ*27である．ところが，トンネル現象に関与する自由度の個数を N とすれば

$$S/\hbar \sim N \gg 1\,. \tag{1.4.14}$$

つまり，トンネル確率は自由度が増えると指数函数的に減少し，巨視的な系においては事実上 0 である．さらに，数学的厳密さをもって“巨視的”といえるのは

$$N \to \infty \tag{1.4.15}$$

の極限であり，この場合のトンネル確率は厳密に 0 である．

この意見を正当と考えるか否かは，巨視的という言葉の定義と関連している．“(1.4.14) をもって巨視的の定義とする”という立場を採るならば，まさしく正当である．しかし (1.4.14) は，たいていの場合に妥当であるには違いないが，巨視的ということに対する素朴な概念に必ずしも合致しない．多数の粒子が関与し，それゆえ，当該の 2 状態が巨視的可峻別であっても，両者を隔てるポテンシャル障壁が大きいとは限らず，

$$S/\hbar = \mathcal{O}(1) \tag{1.4.16}$$

という状況も存在するであろう．右辺が形式的に N に比例していても，その係数が小さくなるように制御できればよいのである．本書の興味の対象は，(1.4.15) のような数学的極限ではなく，

$N \gg 1$ であるにもかかわらず (1.4.16) が成り立つ

---

*26 これも FAPP 議論の一種である．

*27 粗っぽくいえば，トンネル障壁の面積の平方根に比例する量．

という現実的状況である．

1.4.2 巨視的トンネル現象の分類：MQC と MQT

巨視的トンネル現象を記述するのに適切な巨視的自由度（集団自由度）を R と書く．例えば前節のボールの重心位置がそれに当たる．考えるべき巨視的自由度の個数は 1 個とは限らない．例えばボールの重心位置の場合には R は 3 成分のヴェクトルである．簡単のため R は 1 個の自由度を表すものとし，その量子力学的振る舞いが，粒子の場合と同じく次の Schrödinger 方程式で記述されるものと仮定する．

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}_{\mathcal{S}}|\psi(t)\rangle\ , \tag{1.4.17}$$

$$\hat{H}_{\mathcal{S}} := \frac{1}{2M}\hat{P}^2 + U(\hat{R})\ , \tag{1.4.18}$$

$$[\hat{R},\, \hat{P}] = i\hbar\ . \tag{1.4.19}$$

ただし M は正の定数（有効慣性質量），$\hat{P}$ は $\hat{R}$ に正準共役な運動量である．以下，巨視的自由度 R を**巨視系**と略称する．全系の自由度を，R とそれ以外の大衆自由度に選り分け，後者を**環境**と呼ぶ．上記の $\hat{H}_{\mathcal{S}}$ は巨視系のみに関する Hamiltonian であり，これを巨視系 Hamiltonianと呼ぶ*28．全系の Hamiltonian は，これに加えて，環境のみに関する部分および環境と巨視系の相互作用を記述する部分からなる．したがって，巨視系のみに対して上のような量子力学が成立するかどうか自明ではない．この点について詳しくは第 4 章以降で議論する．当面は巨視的トンネル現象について大雑把な概念的把握をすべく，(1.4.17)–(1.4.19) を仮定して話を進める．

巨視的トンネル現象は**巨視的量子共鳴振動**（MQC: macroscopic quantum coherence*29）と**巨視的量子崩壊**（MQT: macroscopic quantum tunneling）に大別される．

MQC は，巨視系が巨視的可峻別な 2 状態間を往復運動する現象，すなわち

---

*28 添字 $\mathcal{S}$ は系 (system) の頭文字．巨視系こそが最大の関心事であり，単に系といえば全系でなく巨視系．

*29 この言葉は，トンネル効果の介在しない MQP をも含む広い意味で用いられることがある．

R が明確に異なる二つの値の間で振動する現象を指す．このような往復運動は，Young 型実験における縞模様に相当する．つまり，後者の縞模様が空間的なものであるのに対し，量子共鳴振動は時間的な縞模様であるといえる（第 2.2 節）．これは QIMDS が直接的に関与する現象である．巨視系に関する Young 型実験を行うことは難しかろうから MQC をもって代用しようというわけである．Young 型二連間隙を作る手間をかけずとも，すでに述べたように，巨視系自身の時間発展が巨視的線形結合を用意してくれる，それを利用しようという虫の良い考えである．MQC 状況を与えるポテンシャルの典型は**対称二連井戸** (symmetric double well)（図 1.3）である．中央の障壁は充分に大きく，初期に

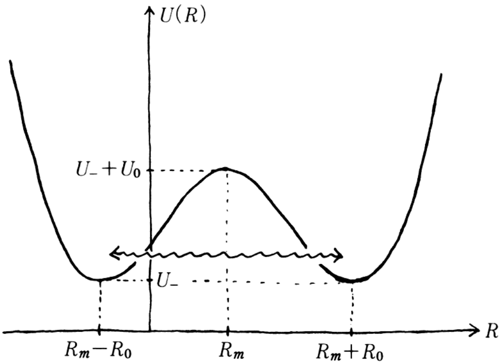


図 1.3　MQC 状況: 対称二連井戸

巨視系が左井戸に局在していたとすれば，それが右井戸に移ることは古典的には不可能で，トンネル効果によってのみ可能である，そういう状況を設定する．巨視系が左井戸に局在した状態と右井戸に局在した状態の巨視的可峻別性は，障壁の存在によって保証される．巨視系の状態が左右井戸間を往復する現象は，二連振子が交互に振れる（あるいは共振周波数の等しい 2 個の音叉が交互に鳴る）様子に似ている．共鳴振動と呼ぶゆえんである．

一方 MQT は，ある状態から，それと巨視的可峻別な状態へ一方的にトンネルする*30現象である．MQT 状況を与えるポテンシャルの典型は**たんこぶ坂**

*30　正式には“トンネル効果で移行する”とでも書くべきところを，このように略記．

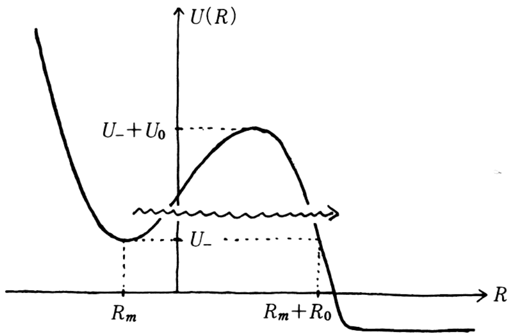


図 1.4　MQT 状況: たんこぶ坂

(bumpy slope)*31(図 1.4)である．巨視系の初期状態が原点付近に局在していたものとすると，巨視系はトンネルして右に抜け出ることができる．原子核の α 崩壊などと類似の現象である．それゆえ，上述の初期状態は**準安定** (metastable) であり，このトンネル現象は**準安定状態** (metastable state) の**崩壊現象**と見ることができる*32．原点付近の井戸を**準安定井戸**と呼ぶ．準安定状態(準安定井戸に局在した状態)と崩壊した状態(右に抜け出た状態)の巨視的可峻別性は，この場合も障壁の存在によって保証される．MQT の検出は，QIMDS の直接的証拠とはならない(第 9 章)ものの，巨視系が純量子力学的に振る舞い得ることの立証として画期的である．

トンネル効果として馴染み深いのは，単に障壁を左から右に通過する現象かもしれない．図 1.5 のような場合には，障壁の左方においても右方においても，粒子に力が働かない*33から，自由トンネル現象 (free tunneling) と呼ぶ．しかしこのような状況は，Young 型実験と同じく実現困難と考えられる．

なお，MQT が，“準安定井戸内での振動” と “たんこぶ障壁を通過する自由トンネル” に分解して説明されることがしばしばあるけれども，この説明が妥当な状況においてはトンネル確率が非常に小さくなり，崩壊現象の検出は不可

---

*31　よりよい愛称を募集中．

*32　これを念頭において MQT を量子崩壊と訳す．MQC・MQT と対置したからといって，前者もトンネル効果を介在する現象であるから，後者を “巨視的トンネル” と訳すと誤解を生じかねない．

*33　つまり，粒子は自由粒子として振る舞う．

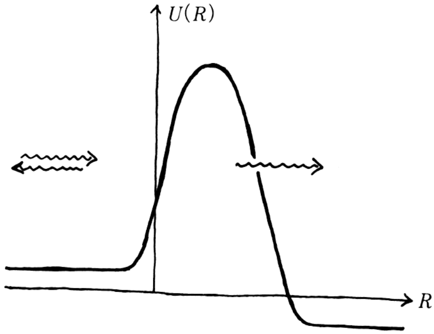


図 1.5　自由トンネル状況: 単純障壁

能である．したがって，MQT と自由トンネル現象とは区別して論ずる方がよい．

演習問題

1.1　猫性度 $\boldsymbol{D}$ の正確な定義を考案せよ（巻末の文献[1]参照）．

1.2　状態 $|\Psi\rangle$ を表す密度演算子 $\hat{\rho}_\Psi$ とは，勝手な演算子 $\hat{A}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}_\Psi \hat{A}) = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle \tag{1.4.20}$$

を満たす演算子のことである．すなわち

$$\hat{\rho}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| \ . \tag{1.4.21}$$

$|\Psi\rangle$ が (1.4.1) で与えられているとして次式を示せ．

$$\hat{\rho}_\Psi = \hat{\rho} + c_+ c_-^* |\Psi_+\rangle\langle\Psi_-| + c_- c_+^* |\Psi_-\rangle\langle\Psi_+| \ . \tag{1.4.22}$$

ただし，$\hat{\rho}$ は式 (1.4.10) で与えられる混合である．

1.3　C_{60} を用いた Young 型干渉実験を想定し，準備すべき二連間隙の大きさ，間隙と検出器の距離など，具体的数値をあたってみよ．

2

巨視的トンネル現象概観

MQC と MQT についての具体的な議論に入る前に，巨視系の個性によらない一般的側面を概観しておく．

2.1 Hamiltonian と Schrödinger 方程式の標準形：次元解析

まず第一になすべきは，次元解析をして，量子性の目安となる無次元量を同定することである．MQC(図 1.3)・MQT(図 1.4) いずれの場合にも，[長さ][*1]，[エネルギー]，[時間] の単位として，それぞれ R_0, U_0, τ_0 を採る．ただし

$$\tau_0 := \frac{R_0}{(U_0/M)^{1/2}} \ . \tag{2.1.1}$$

つまり，ポテンシャル障壁の幅に相当する距離 R_0 を質量 M の粒子が時間 τ_0 かかって等速度で通過したとすると，その際の運動エネルギーがポテンシャル障壁の高さ U_0 と同程度である．

$$(R_0/\tau_0)^2 M = U_0 \ . \tag{2.1.2}$$

この意味で，τ_0 は当該トンネル現象の特性時間である．したがって運動量の単位は $P_0 := (MU_0)^{1/2}$．すべての量を以上の単位で測り，力学変数 q, p，ポテンシャル $V(q)$，Hamiltonian $\hat{H}_S$ および時間 t を以下のように定義する．

$$q := (R - R_m)/R_0 \ , \quad p := P/P_0 \ , \quad t := t_ツ/\tau_0 \ , \tag{2.1.3}$$

---

*1　対象とする系に応じて R の実際の次元は様々である(第 3 章)が，ここではその次元を [長さ] として話を進める．したがって M の次元は [質量] である．

$$V(q) := (U(R_0 q + R_m) - U_-)/U_0\ , \quad \hat{H}_{\mathcal{S}} := \hat{H}_{\mathcal{S}フ}/U_0\ . \quad (2.1.4)$$

ただし $\hat{H}_{\mathcal{S}フ}$, $t_フ$ は (1.4.17) に出てきた $\hat{H}_{\mathcal{S}}$, t のことである*2．すると (1.4.17)–(1.4.19) は

$$ih\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}_{\mathcal{S}}|\psi(t)\rangle\ , \quad (2.1.5)$$

$$\hat{H}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{q})\ , \quad (2.1.6)$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = (MU_0R_0^2)^{-1/2}[\hat{R}, \hat{P}] = ih\ . \quad (2.1.7)$$

ただし

$$h := \frac{\hbar}{U_0\tau_0} = \frac{\hbar}{P_0R_0} = \left\{\frac{\hbar^2/MR_0^2}{U_0}\right\}^{1/2}\ . \quad (2.1.8)$$

(2.1.5), (2.1.6) を<u>位置表現</u> (q 表現)*3すれば

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = H_{\mathcal{S}}\psi(q,t)\ , \quad \psi(q,t) \equiv \langle q|\psi(t)\rangle\ , \quad (2.1.9)$$

$$H_{\mathcal{S}} := -\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q)\ . \quad (2.1.10)$$

状態 $|\psi(t)\rangle$ の位置表現 $\psi(q,t)$ は正式には位置表現波動函数と呼ばれる．これを波動函数と略称する．(2.1.5)–(2.1.7) または (2.1.9)–(2.1.10) を Schrödinger 方程式と Hamiltonian の<u>標準形</u>と呼ぶ*4.

無次元量 h は，当該のトンネル現象を特徴付ける作用の大きさ $U_0\tau_0\,(=P_0R_0)$ を単位として測った Planck 定数であり*5，その大きさが当該トンネル状況の量子性の目安を与える．これは，式 (2.1.8) の右辺が示す通り，粒子を R_0 程度

---

*2　添字フは<u>普通の次元を持つ量</u>の意.

*3　position representation (q representation).　表現の代わりに表示と呼ばれることもあるが，“群の行列表現” などと本質的に同じ事柄であるから表現と呼ぶ.

*4　要するに無次元化しただけであるが，その仕方は一通りでないから，いささか大袈裟にこう呼ぶ.　注: <u>Q人類対古人類</u>　Q人ならば h が 1 になるように単位を採るであろう，量子力学的世界が当たり前の人達であるから．それに対して，どこに量子性が顔を出しているのか常に気になり，量子性の目印たる h を残さずしては気が済まぬのが，筆者の属する古人類である.

*5　h を $2\pi\hbar$ の意味で常用される読者には (2.1.8) に違和感を持たれるかもしれぬ．しかし h は $2\pi\hbar$ の専用代名詞ではない．中学の数学では三角形の高さが h と書かれ，宇宙論で h と言えば無次元化された Hubble 定数である．いちいち $\hbar_{ムジゲン}$ などと書くのも煩わしいので h と書く次第である．$h \equiv 2\pi\hbar$ なる習慣には従わない.

の範囲に閉じ込めた際の零点エネルギーと U_0 の比である．不等式

$$h \ll 1 \tag{2.1.11}$$

の成り立つ状況は**準古典的状況** (quasi-classical situation) と呼ばれる．

本書で扱うトンネル現象の舞台は，すべてこの条件を満たすものである．したがって，波動函数や物理量を h に関して整理して議論することになる．その際，次の記法を使う．

$$\mathcal{O}(1) \equiv \mathcal{O}(h^0)\,, \tag{2.1.12}$$

$$\mathcal{O}(e^{-1/h}) \equiv \mathcal{O}(e^{-B/h}) \ :\ B \text{ は } \mathcal{O}(1) \text{ の正定数}\,. \tag{2.1.13}$$

もちろん，h がむやみに小さくてはトンネル現象を検出することが不可能となる．典型的には 0.1 程度の値を念頭に置く．ただし，例えば $h \sim 0.01$ でも，多数の事象を観察することにより検出可能となる場合（第 3.2 節の核形成など）もある．

(2.1.4) で与えられる $V(q)$ を標準化されたポテンシャルと呼ぶ．その q 依存性の尺度は $\mathcal{O}(1)$ であるとし，MQC・MQT いずれの状況においても，極小点での曲率を ω_0^2 とする（図 2.1）．

$$V(q) \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega_0^2(q\pm 1)^2 : & q \sim \pm 1 \text{ (対称二連井戸)}\,, \\ \dfrac{1}{2}\omega_0^2 q^2 & : q \sim 0 \text{ (たんこぶ坂)}\,. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

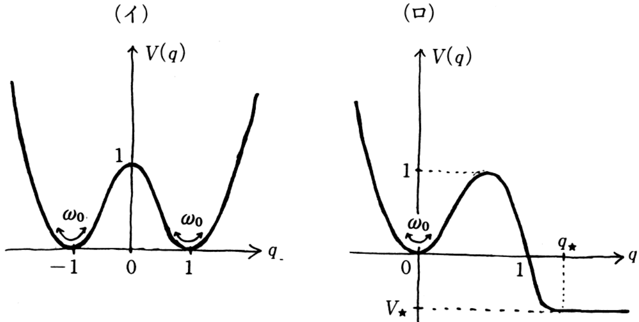


図 2.1　標準化されたポテンシャル (イ) 対称二連井戸，(ロ) たんこぶ坂

もちろん，ω_0 は $\mathcal{O}(1)$ の正定数である．たんこぶ坂は，$q>q_\star$（$q_\star$ は 1 より大きな定数）で負の一定値 $V_\star$ になるものとする*6．図 2.1(イ),(ロ) の形の函数で最も単純なものは，それぞれ，4 次函数 V^{SSDW} および 3 次函数 V^{SBS} である*7．

$$V^{\mathrm{SSDW}}(q) := \frac{\omega_0^2}{8}(q^2-1)^2\ ,\ \omega_0 \equiv \sqrt{8}, \tag{2.1.15}$$

$$V^{\mathrm{SBS}}(q) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega_0^2 q^2(1-q)\ ,\ \omega_0 \equiv \sqrt{27/2} & :\ q < q_\star\ , \\ V_\star & :\ q > q_\star\ . \end{cases} \tag{2.1.16}$$

現実の巨視系においても，適切に実験を設計すれば，$V(q)$ をこれら特殊形によって近似できる場合が多い（第 3 章）．

準古典的状況とは，上述の通り，$\hbar$ が $U_0\tau_0$ に比べて小さくなるように系が設定されているという意味である．そのような状況においても，系が極めて量子力学的な状態を採ることは可能である．たんこぶ坂の準安定井戸の底付近に局在した状態がその一例である．この状態は，調和ポテンシャル $\omega_0^2q^2/2$ 中の基底状態にほぼ等しく，これを古典的描像で記述することはできない．

“$\hbar$ が小さいと準古典的になる” といった類の言い回しに遭遇することがあるが，次元を持つ量 $\hbar$ が大きいとか小さいとかいう表現には意味がない*8．ついでに一言．準古典的状況 (2.1.11) を考えることは，形式的に $\hbar\sim 0$（すなわち $e^2/\hbar c \gg 1$）の世界を考えることとは全く異なる．例えば第 3.1 節で紹介する SQUID の場合，M は Josephson 接合の静電容量であり，その中にも $\hbar$ が潜んでいる．したがって上述の h が単純に $\hbar$ に比例するわけではない．本当に $\hbar\sim 0$ なる仮想世界（そこには SQUID はおろか水素原子も存在し得ない）を想像してみるのも楽しかろう*9 が，それは本書の主題とは無関係である．

---

*6　これは話を単純化するための設定である．$q\to\infty$ で充分速く一定値に近づけばよい．

*7　SSDW ≡ 特殊対称二連井戸 (special symmetric double well), SBS ≡ 特殊たんこぶ坂 (special bumpy slope).

*8　省略した言い方であるから，字義通りに受け取ってはいけない．“1 cm は長いか” とか “20 K は低温か” とか藪から棒にきかれても答えよう無きことに同じ．

*9　例えば J. D. Barrow and F. J. Tipler, *The Anthropic Cosmological Principle*, Clarendon Press (1986), Sect. 4. 5.

2.2 MQC 概観

図 2.1(イ) を少し一般化して，図 2.2 のように ε だけ右に傾いた二連井戸 $V(q;\varepsilon)$ を考えよう．$V(q;0)$ が対称二連井戸(破線)である．巨視系が左井戸に

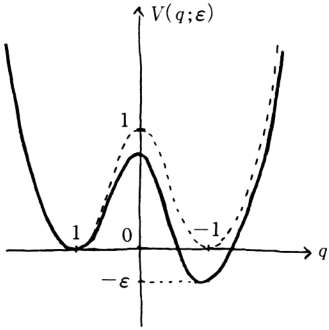


図 2.2 傾斜二連井戸

局在した状態を $|-\rangle$，右井戸に局在した状態を $|+\rangle$ とする．これらは，それぞれ，左右の井戸を単独で考えた場合の基底状態にほぼ等しく，かつ正規直交条件を満たすものとする．

$$\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1 \ , \quad \langle +|-\rangle = 0 \ . \tag{2.2.1}$$

これらを表す波動函数 $\psi_\pm(q) \equiv \langle q|\pm\rangle \, (\in \mathbf{R})$ を図 2.3 に示す*10．以下，簡単のため，この二つの状態で張られる部分空間に限定して考える(二状態近似*11)．すると Hamiltonian $\hat{H}_S$ は次の形になる．

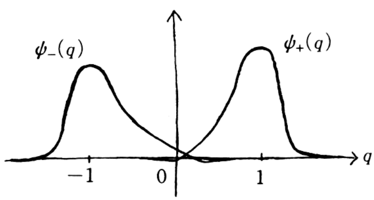


図 2.3 傾斜二連井戸の左右に局在した状態

*10 そうなるように $|\pm\rangle$ の位相を選んでおく．

*11 一般に，2 次元の Hilbert 空間で記述される系は二状態系と呼ばれる．

$$\hat{H}_{\mathcal{S}} = E_+|+\rangle\langle+| + E_-|-\rangle\langle-| - \frac{1}{2}h\Delta(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|) . \quad (2.2.2)$$

$E_\pm$ は右(左)井戸の基底状態エネルギーである．また，Δ は正[*12]定数であり，これが0ならば左右の世界は互いに独立である．すなわち，Δ はトンネル効果の強さの目安を与える．エネルギーの原点を $(E_+ + E_-)/2$ にとれば，

$$\hat{H}_{\mathcal{S}} = h\hat{S}_3\Delta - h\hat{S}_2\delta , \quad (2.2.3)$$

$$\hat{S}_3 := -\frac{1}{2}(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|) , \quad (2.2.4)$$

$$\hat{S}_2 := \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) . \quad (2.2.5)$$

ここに

$$\delta := (E_- - E_+)/h \quad (2.2.6)$$

は ε/h と同程度の量である．

初期状態が $|-\rangle$，すなわち

$$|\psi(0)\rangle = |-\rangle \quad (2.2.7)$$

として，Schrödinger 方程式 (2.1.5) を解いてみよう．

（i） $\delta = 0$ の場合: $\hat{H}_{\mathcal{S}}$ の基底状態 $|0\rangle$ と励起状態 $|1\rangle$ およびそれぞれの固有値 E_0, E_1 は

$$|1\rangle = (|+\rangle - |-\rangle)/\sqrt{2} , \quad E_1 = +h\Delta/2 , \quad (2.2.8)$$

$$|0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2} , \quad E_0 = -h\Delta/2 . \quad (2.2.9)$$

つまり $E_1 - E_0 = h\Delta$（図 2.4）．それゆえ，Δ は**基底エネルギー分裂**[*13]と呼ばれる．したがって

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= \exp(-i\hat{H}_{\mathcal{S}}t/h)|-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{it\Delta/2}|0\rangle - e^{-it\Delta/2}|1\rangle\right)\end{aligned}$$

---

*12　正として一般性を失わない．そうなるように $|\pm\rangle$ の相対位相を調節することができる．

*13　トンネル効果を無視すれば，基底状態は縮退している（$|\pm\rangle$ が同一のエネルギーを持つ）．この縮退がトンネル効果によって解ける，という意味で分裂といわれる．

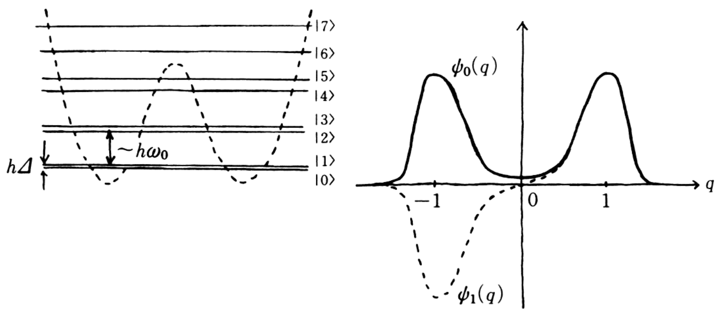


図 2.4　対称二連井戸のエネルギー固有状態

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(e^{it\Delta/2}+e^{-it\Delta/2}\right)|-\rangle+\left(e^{it\Delta/2}-e^{-it\Delta/2}\right)|+\rangle\right\} . \qquad (2.2.10)$$

ここで，例えば最後の式の $|+\rangle$ の係数は直前の式の $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の係数の和である．これが Young 型干渉実験の場合の波の重ね合わせに対応する．$|0\rangle$ と $|1\rangle$ が二連間隙の役割を果たしているわけである．時刻 t に巨視系が状態 $|+\rangle$ に見出される確率を $\mathcal{P}_+(t)$ とすれば，

$$\mathcal{P}_+(t) = \{\sin(t\Delta/2)\}^2 . \qquad (2.2.11)$$

（ii） $0<|\delta|\ll\omega_0$ の場合：$\hat{H}_S$ を対角化して上と同様に計算すればよいが，$\mathcal{P}_+(t)$ は以下のように直観的にも求められる．

$$\hat{S}_1 := \frac{1}{i}[\hat{S}_2, \hat{S}_3] = \frac{i}{2}(|+\rangle\langle-|-|-\rangle\langle+|) \qquad (2.2.12)$$

とすれば $\{\hat{S}_a\,|\,a=1,2,3\}$ は大きさ 1/2 のスピン演算子となる．3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{E}^3$ とその正規直交基底系

$$\{\boldsymbol{e}_j \mid j=x,y,z : \boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k=\delta_{jk}\} \qquad (2.2.13)$$

を導入して，ヴェクトル $\hat{\boldsymbol{S}}$, $\boldsymbol{B}$ を定義しよう．

$$\hat{\boldsymbol{S}} := \hat{S}_1\boldsymbol{e}_x+\hat{S}_2\boldsymbol{e}_y+\hat{S}_3\boldsymbol{e}_z , \qquad (2.2.14)$$

$$\boldsymbol{B} := -\boldsymbol{e}_y\delta+\boldsymbol{e}_z\Delta . \qquad (2.2.15)$$

すると

$$\hat{H}_S = h\boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} . \qquad (2.2.16)$$

Hamiltonian をこの形に書くと，空間的に一様な磁場 $\boldsymbol{B}$ 中に置かれたスピン*14のエネルギーと見ることができる．したがって，スピンの期待値

$$\boldsymbol{S}(t) \equiv \langle \hat{\boldsymbol{S}} \rangle (t) := \langle \psi(t) | \hat{\boldsymbol{S}} | \psi(t) \rangle \tag{2.2.17}$$

は $\boldsymbol{B}$ を軸とした歳差運動をする．初期条件により

$$\boldsymbol{S}(0) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y \ . \tag{2.2.18}$$

よって $\boldsymbol{S}(t)$ は頂角 2ϑ の円錐を描く．ただし ϑ は $\boldsymbol{B}$ と $-\boldsymbol{e}_y$ の間の角度である（図 2.5）．したがって

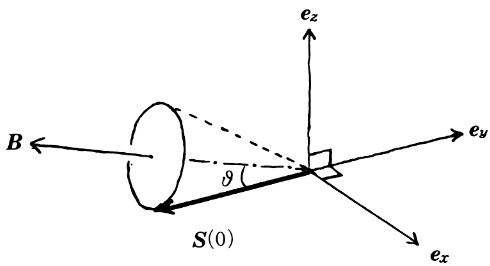


図 2.5　架空スピンの歳差運動

$$\max_t S_2(t) = -\frac{1}{2}\cos 2\vartheta \ . \tag{2.2.19}$$

これと恒等式

$$\mathcal{P}_+(t) = \frac{1}{2} + S_2(t) \tag{2.2.20}$$

を用いて

$$\max_t \mathcal{P}_+(t) = (\sin\vartheta)^2 = \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + \delta^2} \ . \tag{2.2.21}$$

実験室に用意された二連井戸の対称性が完全でなく，$\varepsilon \neq 0$（つまり共鳴条件から僅かにずれている）とすると，量子共鳴振動の振幅は式 (2.2.21) 右辺の因子だけ小さくなる．ところが次節で見る通り一般に Δ の大きさは $\mathcal{O}(e^{-1/h})$ であり，ε/h（したがって δ）をこの程度に抑えることは必ずしも容易でない．それゆ

*14　正確には，スピンに付随する磁気能率．以下，磁気能率の大きさは磁場に吸収しておく．

え，$\delta \gg \Delta$ となって量子共鳴振動は見えないことが多い．この点が，MQC 実現を目指す実験家の克服すべき第一の関門である．

以上，量子共鳴振動を架空スピンの歳差運動に置き換えて論じた．これを変数 q で見れば，初期に左井戸に局在していた波束が左右の井戸を往復運動するはずである．この様子は波動函数を調べれば分かる．例えば $\delta=0$ の場合，(2.2.10) より

$$\psi(q,t) \simeq \cos(t\Delta/2)\ \psi_{-}(q) + i\sin(t\Delta/2)\ \psi_{+}(q)\ . \qquad (2.2.22)$$

当然のことながら，障壁部分においても確率流 $J(q,t)$ は 0 でなく，その符号は周期 $2\pi/\Delta$ で変動する．

$$J(q,t) := \Re\left\{\psi^{*}(q,t)\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial q}\psi(q,t)\right\} \qquad (2.2.23)$$

$$\simeq \frac{h}{2}\{\psi_{-}(0)\psi'_{+}(0) - \psi_{+}(0)\psi'_{-}(0)\}\sin(t\Delta)\ :\ q \sim 0\,. \qquad (2.2.24)$$

なお，図 2.2 にてポテンシャルをさらに傾けていくと，左井戸の基底状態と右井戸の第 1 励起状態がほぼ同一エネルギーとなる状況が生じ，(2.2.21) の右辺が

$$\frac{\tilde{\Delta}^{2}}{\tilde{\Delta}^{2} + (\delta - \Omega)^{2}}\ :\ \tilde{\Delta} \sim \Delta,\ \Omega \sim \omega_{0} \qquad (2.2.25)$$

で置き換わって，再び往復運動が起こり得る．これは上述の MQC の一変種であり，同様にして導くことができる．もちろん，先ほどの二状態空間とは別の空間が必要である．

MQC 実験には，上述の関門に続いて第二の関門が待ち構えている．共鳴振動を検出しようとする測定操作自体が共鳴振動を壊してしまいかねないのである．これは，検出器が測定対象の巨視系と必然的に縺状態になってしまうことによる．量子力学が成立している限り避けられない，根本的問題である．しかし，壊すといっても，その質は実験次第で様々である．巧く工夫すれば，共鳴振動を部分的に破壊しつつも検出することは可能である（第 9 章）．

2.3　MQT 概観

量子崩壊現象において，その初期状態たる準安定状態*[15]とはいかなるものであろうか．この問いに答えるには，巨視系がそもそも準安定状態に至った経緯(つまり履歴)を知る必要がある．しかし，Schrödinger 方程式 (2.1.5) を用いて崩壊を論じようという立場からすれば，それは埒外の問題であって*[16]，準安定状態なるものが与えられたという前提のもとに議論を進めざるを得ない．つまり，“準安定状態とは準安定井戸内に局在した状態であろう”という直観に基づき，物理的にもっともらしい量子状態を準安定状態の模型として採用する以外に手だてはない．

図 2.1(ロ) の準安定井戸における基底状態を**準基底状態** (virtual ground state) と呼ぶ(正確な定義は付録 B)．これは，調和ポテンシャル $\omega_0^2 q^2/2$ の基底状態とほぼ同じであり，その波動函数は原点を中心とする Gauss 型函数である．以下，準安定状態が近似的に準基底状態で与えられるものと仮定する．すると量子崩壊問題は，準基底状態 $|\psi_0\rangle$ を初期状態として Schrödinger 方程式 (2.1.5) を解くことに帰着される．時刻 t において巨視系が準基底状態に見出される確率を時刻 t における**滞留確率***[17]と呼び，$\mathcal{P}(t)$ で表す．

$$\mathcal{P}(t) := \int_{-\infty}^{1} dq \ |\psi(q,t)|^2 \ . \tag{2.3.1}$$

積分の上限を 1 と採ったのは単なる便宜であり，$\mathcal{O}(1)$ の正数であれば何でもよい．下限も同様であって，$-\infty$ を -1 程度以下の負数で置き換えても構わない*[18]．物理的には $\mathcal{P}(t)$ を

　　時刻 t において巨視系が崩壊していない確率

と解釈するわけである．これを計算すると(付録 B)

---

*15　1.4.2 節で述べた状態．これは実際に実験室に用意され得る物理的状態を指す．

*16　環境自由度を含めた考察においても事情は同じである．一般に初期条件自体を議論しようとすると，当該初期時刻より前の状態が問題となり，どこまで遡っても限りがない．

*17　persistence probability．生存確率 (survival probability) なる用語が使われることもあるが，おどろおどろしい．

*18　いかようにも採っても $\mathcal{P}(0)$ は非常に良い精度で 1 である．

$$\mathcal{P}(t) \simeq \exp(-\Gamma t) , \tag{2.3.2}$$

ただし Γ は $\omega_0 e^{-1/h}$ 程度の正定数(次節の式 (2.4.5))．これは古典的な確率過程におけるのと同じ方程式に従う．

$$d\mathcal{P}(t)/dt \simeq -\Gamma\mathcal{P}(t) < 0 . \tag{2.3.3}$$

この結果に基づいて，Γ は準基底状態の**崩壊率** (decay rate) と呼ばれ，あるいは Γ^{-1} が準基底状態の**寿命** (lifetime) と呼ばれる．状態 $|\psi(t)\rangle$ は，準基底状態が崩壊していく様相を表しており，これを**崩壊状態**と略称する．巨視系が準安定井戸の外(図 2.1(ロ) の障壁の右側)にある状態を形式的に $|$ 外 $\rangle$(ただし $\langle$ 外 $|$ 外 $\rangle = 1$)と書くと，崩壊状態は模式的に[19]

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\Gamma t/2}|\psi_0\rangle + (1-e^{-\Gamma t})^{1/2}| \text{外} \rangle . \tag{2.3.4}$$

これが MQT に登場する巨視的線形結合である．

一言注意しておこう．“崩壊率”(“単位時間当たりの” 崩壊確率)という概念は，本来，量子力学とは異質のものである．量子力学が予言するのはある時刻にある事象の見出される確率だけである[20]．$\mathcal{P}(t)$ を詳しく調べると，その概形は図 2.6 のようになる．図中の $\bar{\epsilon}$ は初期状態 $|\psi_0\rangle$ におけるエネルギー

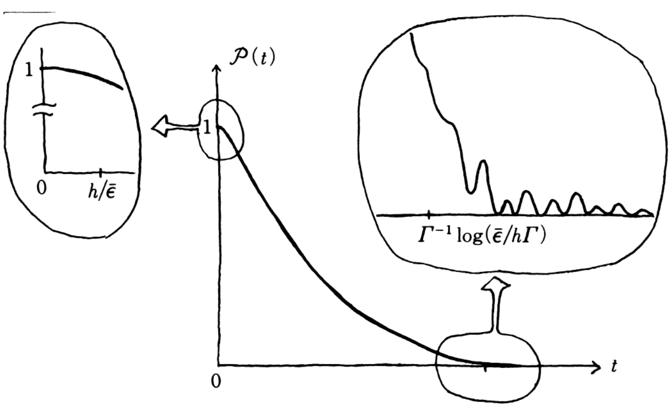


図 2.6 滞留確率

* 19 これはあくまで模式的である．正確な表式は付録 B.

* 20 一般に Fermi の黄金律を用いて遷移 “率” が得られるといわれるけれども，それを崩壊問題に即していえば，$(1-\mathcal{P}(t))/t$ を時間域 (2.3.6) において計算することにより Γ を求めているわけである．

の不確定度である．$|\psi_0\rangle$ が準基底状態であるから，$\bar\epsilon$ は準安定井戸を調和井戸で近似した場合のエネルギー準位間隔に比べて充分小さくなければならない．

$$\bar\epsilon \ll h\omega_0 \ . \qquad (2.3.5)$$

準古典的状況を考えるから，下記の時間域が存在する．

$$h/\bar\epsilon \ll t \ll \Gamma^{-1}\log(\bar\epsilon/h\Gamma) \ . \qquad (2.3.6)$$

公式 (2.3.2) は，この時間域においてのみ妥当な近似形である．一般の時刻においては $\mathcal{P}(t)$ は (2.3.2) の形からずれ，しかも t の単調減少函数でもない．もし，崩壊現象が古典的な確率過程ならば，$\mathcal{P}(t)$ は "崩壊時刻 t に関する確率分布" をも表そうが，量子力学の場合にはそのような解釈はできない．実際，$\mathcal{P}(t)$ の長時間振る舞いの尾は $1/t^2$ に従ってゆっくりと減衰する[*21]．無理矢理に $\mathcal{P}(t)$ を崩壊時刻 t に関する確率分布とみなしたとしても，それに関する t の期待値は，寿命 Γ を与えてはくれず，無限大である．

$$\int_0^\infty dt\ t\mathcal{P}(t) \Big/ \int_0^\infty dt\ \mathcal{P}(t) = \infty \, . \qquad (2.3.7)$$

以上，絶対零度という極限状況を想定してきた．一方，温度が充分に高ければ，準安定状態にあった系は熱揺動に助けられて自由エネルギー障壁を乗り越えることができる．これが，"熱揺動を介した古典的崩壊" (略して古典崩壊) である．自由エネルギー障壁の高さを F_0 とすれば，古典崩壊率 $\Gamma_{古}$ は Arrhenius の公式で与えられる．

$$\Gamma_{古} \sim \omega_0 \exp(-\beta F_0) \ . \qquad (2.3.8)$$

ただし β は温度の逆数[*22] であり，F_0 は $\mathcal{O}(1)$ の量である[*23]．上式と量子崩壊率の式 (2.4.5) を考慮すれば，崩壊率は温度の函数としておおむね図 2.7 の実

---

*21　尾の形の詳細は初期状態の採りかたによって敏感に変わる．これは崩壊現象一般 (つまり，必ずしもトンネル効果を介しない崩壊現象) において馴染みのことである．t^{-3} に比例する尾の例もある．

*22　通常の温度に Boltzmann 定数 k_B を掛けたものを温度と呼ぶ．Boltzmann 定数は，歴史的には重要であるものの，単なる単位変換因子に過ぎないから，いちいち書くべき理由はない．以下の定義を用いれば統計熱力学の諸式から k_B は完全に消え失せる．(温度) := (温度)$_{ア}k_B$，(エントロピー) := (エントロピー)$_{ア}/k_B$.

*23　一貫してエネルギーを図 1.4 の U_0 を単位にして測っていることに注意．精確に F_0 の値は何かと問われれば，これまた一筋縄ではいかぬ問題である．

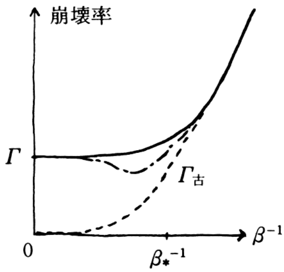


図 2.7　崩壊率の温度依存性

線のようになるものと予想される[*24]．図の β_*^{-1} は，古典崩壊率を低温域に外挿した値が量子崩壊率と一致する温度である．

$$\beta_*^{-1} \sim h/B\ . \tag{2.3.9}$$

この温度を境にして崩壊の主因が熱揺動から量子揺動（トンネル効果）に乗り移る．それゆえ，β_*^{-1} を**乗移温度** (crossover temperature) と呼ぶ．

図 2.7 のような振る舞いが実験的に観察されることが MQT 検出の有力証拠となる．しかし，有限温度における量子崩壊理論は確立されているとは言い難い．また，本書の興味の中心はトンネル現象にある．したがって，以下，低温域($\beta^{-1} \ll \beta_*^{-1}$)に着目し，$\beta^{-1}=0$ として話を進める．

本節で述べた崩壊現象と前節の MQC の中間に位置する現象に，**巨視的共鳴トンネル現象** (macroscopic resonant tunneling) と呼ばれるものがある．これは，振幅 (2.2.25) を持つと期待される共鳴振動が，環境の効果あるいは測定操作自体の影響など何らかの原因で観察されず，単に左から右への遷移のみが検出される現象をいう．左井戸の基底状態と右井戸の励起状態のエネルギーがほぼ等しいときに遷移が検出されるので “共鳴” トンネルと呼ばれるわけである．この現象も，QIMDS の直接的証拠とはならないから，MQT の一種として分類しておくのが妥当である．実験は以下のようになされる．巨視系を多数用意する．もちろん，これら巨視系はすべて同一の性質を持つものである[*25]．まず

---

*24　この図の Γ は環境効果を考慮した量子崩壊率(第 7 章)である．また，環境効果の温度依存性によっては，図の一点鎖線のようになる場合もあると考えられている．

*25　巨視系の ensemble

初期時刻 0 に二連井戸を左下がりに傾け ($\varepsilon=\varepsilon(0)<0$)，すべての巨視系を左井戸の基底状態 $|-\rangle$ に用意する．次いで，ε をゆっくりと*26増加させる．

$$0<\dot{\varepsilon}(t)/|\varepsilon(0)|\ll\omega_0 . \tag{2.3.10}$$

こうして二連井戸を，対称二連井戸 ($\varepsilon(t)=0$) を経て次第に右下がり ($\varepsilon(t)>0$) に傾けていく．この間，右井戸に遷移した巨視系の個数を観察する．二連井戸が ε だけ傾いたときに遷移する個数を $N(\varepsilon)$ とすれば，典型的に図 2.8 のような実験結果が期待される．ε が増すにつれて障壁の高さと幅が減少する．した

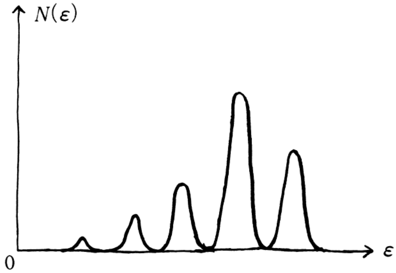


図 2.8　共鳴トンネル現象の実験結果の概念図

がってトンネルしやすくなり，これを反映して Lorentz 型の山は ε と共に大きくなる．さらに ε が増えると山が小さくなるのは，すでに大多数の巨視系がそれ以下の ε のときにトンネルしてしまっているためである．もちろん，図の詳細は $\dot{\varepsilon}(t)$ の値による．$\dot{\varepsilon}(t)$ を小さくすればするほど，より小さな ε のときにトンネルする個数が増える．所与の ε にてトンネルするまでゆっくり待ってやることになるからである．

2.4　基底エネルギー分裂と崩壊率の公式

対称二連井戸における基底エネルギー分裂 Δ は次式によって与えられる．

$$\Delta=\tilde{A}\exp(-I/h) , \tag{2.4.1}$$

---

*26　正式にいえば**断熱的** (adiabatic) に．**断熱条件** (2.3.10) が満たされないと，巨視系はトンネルする前に左井戸の励起状態に飛び上がり得る．もちろん，意図的にこの条件を破って飛び上がりの効果を調べることも可能である．

$$\tilde{A} := \frac{\omega_0}{\pi}\left\{\frac{4\pi\omega_0}{h}\exp(2\tilde{\zeta})\right\}^{1/2}, \tag{2.4.2}$$

$$I := \int_{-1}^{1} dq\sqrt{2V(q)}, \tag{2.4.3}$$

$$\tilde{\zeta} := \int_0^1 dq\left\{\frac{\omega_0}{\sqrt{2V(q)}} - \frac{1}{1-q}\right\}. \tag{2.4.4}$$

一方，たんこぶ坂における準基底状態の崩壊率 Γ も類似の公式で与えられる．

$$\Gamma = A\exp(-B/h), \tag{2.4.5}$$

$$A := \frac{\omega_0}{2\pi}\left\{\frac{4\pi\omega_0}{h}\exp(2\zeta)\right\}^{1/2}, \tag{2.4.6}$$

$$B := 2\int_0^1 dq\sqrt{2V(q)}, \tag{2.4.7}$$

$$\zeta := \int_0^1 dq\left\{\frac{\omega_0}{\sqrt{2V(q)}} - \frac{1}{q}\right\}. \tag{2.4.8}$$

これら公式は素朴 WKB 法(naive WKB method) を使えば容易に導かれる．WKB 法には適用可能条件がある．トンネルする粒子の運動エネルギーが大きい(波長がポテンシャルの変化の尺度に比べて小さい)ことが必要であり，また，接続公式の使える向き(右向きまたは左向き)が決まっている．これらの条件を無視し，基底状態に対して WKB 法を当てはめ，接続公式も双方向に使う無節操な計算法を素朴 WKB 法と呼ぶ．

基底エネルギー分裂の計算は概念的にもやさしい．束縛状態のエネルギーを求めさえすればよい．結果は

$$\Delta^{\text{素朴 WKB}} = \frac{\omega_0}{\pi}\exp\{-\tilde{S}(h\omega_0/2)/h\}. \tag{2.4.9}$$

指数は，エネルギー E が左(または右)井戸の基底エネルギー $h\omega_0/2$ に等しい場合の障壁下作用(sub-barrier action)

$$\tilde{S}(E) := \int_{-q[E]}^{q[E]} dq\sqrt{2\{V(q)-E\}} \tag{2.4.10}$$

である($q=q[E]\,(>0)$ は $V(q)=E$ の根)．これを E で展開すると

$$\tilde{S}(E) = I - \frac{E}{\omega_0} \log\left(\frac{2\omega_0^2 \exp(1+2\tilde{\zeta})}{E} \right) + \mathcal{O}(E^{3/2}) \ . \quad (2.4.11)$$

これを (2.4.9) に代入すれば (2.4.1) が得られる．細かいことをいえば，前置因子 (pre-exponential factor) $\tilde{A}$ に余計な因子

$$(e/\pi)^{1/2} = 0.930\cdots \quad (2.4.12)$$

の掛かった結果が得られる*27．実は，公式 (2.4.1) は，素朴 WKB 法の欠点を補った**適正 WKB 法**(proper WKB method) によって得られたものである．

崩壊率を求めるには若干の理論が必要である．結論をいうと，エネルギー固有函数 $\mathcal{U}_E$ をエネルギー E の函数として求めさえすれば，それから崩壊率が求められる．$\mathcal{U}_E$ を素朴 WKB 法で計算し，付録 B の理論を援用すれば

$$\Gamma^{\text{素朴 WKB}} = \frac{\omega_0}{2\pi} \exp\{-2S(h\omega_0/2)/h\} \ . \quad (2.4.13)$$

この場合の指数は，エネルギー E が準安定井戸の基底エネルギー $h\omega_0/2$ に等しい場合の障壁下作用

$$S(E) := \int_{q_-[E]}^{q_+[E]} dq \sqrt{2\{V(q)-E\}} \quad (2.4.14)$$

の 2 倍である（$q=q_\pm[E]$ は $V(q[E])=E$ の根で $0<q_-[E]<q_+[E]$）．$2S(E)$ の展開は $\tilde{S}(E)$ の展開と同じ形式になり，式 (2.4.11) にて $(I,\tilde{\zeta})$ を (B,ζ) に替えるだけでよい．したがって，前置因子 A に余計な因子 (2.4.12) の掛かった結果が得られることも，基底エネルギー分裂の場合と同じである．正確な公式 (2.4.5) は，やはり適正 WKB 法を用いて**準定常波** (quasi-stationary wave)（付録 B）の複素固有値を求めることにより得られる．ただし，崩壊率の理論値を実験と比較する際，前置因子の大きさが $\mathcal{O}(1)$ の精度まで問題になることはほとんどない（それほどに精緻な実験は望めないことが多い）．したがって，結果論として，実用上は素朴 WKB 法で事足りる．

ポテンシャル (2.1.15) と (2.1.16) について $I,\tilde{\zeta},B,\zeta$ を具体的に計算しておこう．

$$I^{\text{SSDW}} = \frac{2}{3}\omega_0 = \frac{4}{3}\sqrt{2} = 1.88\cdots \ , \quad \tilde{\zeta}^{\text{SSDW}} = \log 2 \ , \quad (2.4.15)$$

---

*27　これはむしろ驚くべき一致というべきであろう．

$$B^{\mathrm{SBS}} = \frac{8}{15}\omega_0 = \frac{4}{5}\sqrt{6} = 1.95\cdots\ , \quad \zeta^{\mathrm{SBS}} = \log 4\ . \qquad (2.4.16)$$

2.5　量子崩壊現象と不可逆過程

Δ と Γ の表式は形式的によく似ているが，それぞれの記述する現象は根本的に異なる．

環境を無視する限り，MQC は単に Hamiltonian の離散固有値を求める問題に過ぎない．対応するエネルギー固有状態*28はもちろん束縛状態である．この問題は概念的には単純である．

これに対し，MQT の Hamiltonian の固有値 E は連続的であり，対応するエネルギー固有函数 $\mathcal{U}_E(q)$ は規格化できない．崩壊状態 $|\psi(t)\rangle$ はエネルギー固有状態ではない．もしエネルギー固有状態なら $\psi(q,t)$ の絶対値は時間変動しない．後者は $\mathcal{U}_E(q)$ を $\bar{\epsilon}$ 程度のエネルギー範囲にわたって重ね合わせたものである．

$$\psi(q,t) = \int_{E_0-\bar{\epsilon}}^{E_0+\bar{\epsilon}} dE\ c(E) e^{-iEt/h} \mathcal{U}_E(q)\ . \qquad (2.5.1)$$

$t=0$ のとき，これらの波 $\mathcal{U}_E(q)$ が原点 $(q=0)$ 付近で最大限建設的に干渉する結果，原点付近に局在した波束 $\psi_0(q)$ となる（そうなるように重ね合わせの係数 $c(E)$ が選ばれている）わけである．$t\neq 0$ のときには，各波 $\mathcal{U}_E(q)$ に位相因子 $\exp(-iEt/h)$ がかかるため，干渉の様子が変わる．原点付近では，初期には干渉の建設性が損なわれて｜確率振幅｜は減少する．一般に，$\mathcal{P}(t)$ の初期振る舞いは

$$\mathcal{P}(t) \simeq 1-(t/\tau_Q)^2\ :\ t \ll \tau_Q \sim h/\bar{\epsilon}\ . \qquad (2.5.2)$$

上記時間域は**量子 Zeno 領域**と呼ばれる（第 4.5 節）．時間が経つにつれて建設性が部分的に回復することがあり得る．ただし完全に回復することはない．これが図 2.6 の長時間域 $t \gg \Gamma^{-1}$ における減衰振動である．この振動は，崩壊を確率過程と捉えたのでは理解し難いが，波動の振る舞いとしては極く自然であ

*28　慣例に従い，Hamiltonian の固有状態のことをエネルギー固有状態と呼ぶ．

る．干渉の建設性が単調に減少すべき必然性はない．初期の単調減少は，$t=0$ にて最大限建設的に干渉していたという初期条件の結果である．第 2.3 節で強調した通り，(2.3.2) は時間域 (2.3.6) においてのみ正しい．

重ね合わせに参加している個々のエネルギー固有函数を仔細に調べれば，それぞれが，ポテンシャル障壁による反射波と透過波の重ね合わせである．しかし，$\psi(q,t)$ 全体として見れば，“明確に局在した波束が障壁で反射されて再び井戸内に戻って来る”という描像は成り立たない．そのような描像が成り立つほどに局在した波束を作るには，相応に広いエネルギー範囲にわたってエネルギー固有函数を重ね合わせる必要があるが，これは条件 (2.3.5) と両立しないからである．

部分的に振動するとはいえ，大局的には $\mathcal{P}(t)$ は時間が経つにつれて減少する．この減少は不可逆現象の一種である．どうして不可逆現象が出てきたのであろうか．理由は簡単である．(2.5.1) の代わりに，

$$\phi_N(t) \equiv \sum_{n=0}^{N} c_n e^{-i\omega_n t} = e^{-i\omega_0 t} \sum_{n=0}^{N} c_n e^{-i\Omega_{n0} t} \ : \ \Omega_{n0} \equiv \omega_n - \omega_0 > 0 \tag{2.5.3}$$

を考えてみよう．$N=1$ の場合には，$|\phi_1(t)|$ は時間が $2\pi/\Omega_{10}$ だけ経てば元に戻る．しかし $N \geqq 2$ となると必ずしもそうはいかない．もし

$$\Omega_{n0}\tau_{\mathrm{P}} = 2\pi M_n \tag{2.5.4}$$

を満たす τ_{P} と整数 $\{M_1, M_2, \cdots, M_N\}$ が存在すれば，$|\phi_N(t)|$ は $t=\tau_{\mathrm{P}}$ のとき初期値に戻る．しかし，そのためには，ある基本周波数が存在して各 Ω_{n0} がその整数倍でなければならない．この事情が当てはまるのは調和振動子の波束のような特殊な場合に限られる．もし，異なる Ω_{n0} の比に無理数が含まれると，$|\phi(t)|$ は決して初期値に戻らない．ただし，(2.5.4) が近似的に満たされれば，時間が τ_{P} だけ経ったとき，初期値に充分近い値になり得る．音の唸りと本質的に同じことである．このような現象は **Poincaré 輪廻** (Poincaré cycle) と呼ばれ，τ_{P} は **Poincaré 周期** (Poincaré period) と呼ばれる[*29]．要するに，充分に時間が経てば初めの値にいくらでも近い値に戻り得るということであり，こ

---

*29　正式には **Poincaré 再帰時間** (Poincaré recurrence time).

れを厳めしくいえば

Poincaré 再帰定理 (Poincaré recurrence theorem)[*30]：任意の正数 ϵ に対し，次式を満たす $\tau_P^{(\epsilon)}$ が存在する．

$$\max_t \, \big|\, |\phi(t+\tau_{\rm P}^{(\epsilon)})| - |\phi(t)| \,\big| < \epsilon \, . \tag{2.5.5}$$

$\tau_{\rm P}^{(\epsilon)}$ は精度 ϵ の Poincaré 再帰時間と呼ばれる．式 (2.5.1) の積分は和の極限であり，$\{\Omega_{n0}\}$ に相当するものを連続無限個含むといえる．したがって，例えば $\psi(0,t)$ の Poincaré 周期は ∞ である．$\mathcal{P}(t)$ についても同様であり，これが上述の不可逆性の原因である．

不可逆といったが，Schrödinger 方程式は時間反転に関して形を変えないから，上の現象は実は可逆である．勝手な定数 T に対して

$$\bar{\psi}(q,t) := \psi^*(q,T-t) \tag{2.5.6}$$

は $\psi(q,t)$ と同一の Schrödinger 方程式に従い，かつ

$$\bar{\psi}(q,0) = \psi^*(q,T) \, , \tag{2.5.7}$$

$$\bar{\psi}(q,T) = \psi^*(q,0) \, . \tag{2.5.8}$$

つまり $|\bar{\psi}(q,t)|$ は $|\psi(q,t)|$ を逆行させたものになっている．しかし，現実には崩壊した状態が準安定状態に戻ることはない．それは，初期条件 (2.5.7) を準備することが至難であること，つまり，右辺における重ね合わせの係数 $c^*(E)\, e^{+iET/h}$ を正確に再現することが現実的に不可能であることによる．したがって，可逆といったが，やはり事実上は不可逆である．この**時間の矢** (arrow of time) は，池の波の場合と同じ性質のものである[*31]．

2.6 Euclid 作用：跳返と瞬子

公式 (2.4.5) の指数函数の肩に現れた B について，一つの解釈を紹介してお

---

*30 元来は閉じた“保測力学系” に対する定理であるが，ここで述べていることはそれと本質的に同じである．

*31 池に雨粒が落ちて円形の波紋が拡がるのは馴染みの光景であるが，池の縁から円形波が中央に集まって水滴が飛び上がるのは見られない．詳しくは，例えば P. C. W. Davies, *The Physics of Time Asymmetry*, University of California Press (1977), Chap. 5–6.

こう[*32]．ポテンシャル $\underline{-V(q)}$ のもとで運動する架空粒子を空想し[*33]，この運動を記述する架空の時間を τ とする．特にエネルギー 0 の場合を考え，時刻 τ における架空粒子の位置を $\mathcal{Q}(\tau)$ とすれば，

$$\frac{1}{2}[\dot{\mathcal{Q}}(\tau)]^2 - V(\mathcal{Q}(\tau)) = 0\,, \tag{2.6.1}$$

ただし・は τ 微分を表す．時間の原点の採り方は勝手であるから，以下

$$\mathcal{Q}(0) = 1 \tag{2.6.2}$$

と採る．この軌道は時刻 $-\infty$ に $q=0$ を出発し，時刻 0 に $q=1$ で跳ね返り，時刻 $+\infty$ には再び $q=0$ に戻る（図 2.9）．それゆえ，$\mathcal{Q}$ を**跳返**[*34](bounce) と

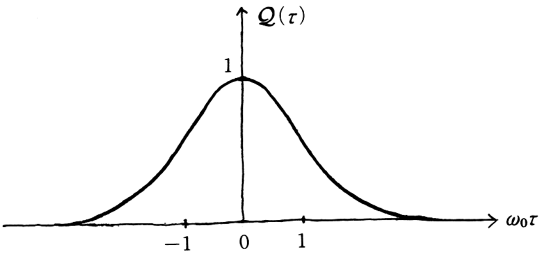


図 2.9　跳返

呼ぶ．あらわに書けば

$$|\tau| = \int_{\mathcal{Q}(\tau)}^{1} \frac{dq}{\{2V(q)\}^{1/2}}\ . \tag{2.6.3}$$

$\mathcal{Q}(\tau)$ は τ について偶である．したがって

$$\dot{\mathcal{Q}}(0) = 0\,. \tag{2.6.4}$$

式 (2.6.1) は，ポテンシャル $V(q)$ のもとで運動する通常の粒子に対するエネルギー保存則

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2 + V(q(t)) = 定数 \tag{2.6.5}$$

＊32　これは純理論的解釈であって，実験の解析には不要かつ無益であるが，理論屋さんの言辞に惑わされぬよう，この解釈に使われる用語ぐらいは実験屋さんも知っておいた方がよかろう．

＊33　架空・空想といっても内容空虚を含意するつもりはない．空を見上げておおらかに想像されたい．

＊34　はねかえり

にて，形式的に

$$t = i\tau, \quad q(i\tau) = \mathcal{Q}(\tau) \tag{2.6.6}$$

と書き換え，右辺の定数を 0 と置いたものに等しい．慣例により τ を **Euclid 時間**[*35] と呼ぶ．唐突に Euclid が登場したが，この言葉は相対論的分脈に由来する．Minkowski 線素

$$-(dt)^2+(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 \tag{2.6.7}$$

にて形式的に (2.6.6) と置けば

$$(d\tau)^2+(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2 \tag{2.6.8}$$

となり，Euclid 線素が得られるからである．これに応じて，(2.6.1) の左辺を **Euclid エネルギー**と呼ぶ．

跳返は $\tau<0$ のとき単調増加函数であるから，

$$q = \mathcal{Q}(\tau) \tag{2.6.9}$$

によって $q\in(0,1)$ と $\tau\in(-\infty,0)$ が 1 対 1 に対応付けられる．これを用いて B を書き直すと

$$B = 2\int_{-\infty}^{0} d\tau \dot{\mathcal{Q}}(\tau)\dot{\mathcal{Q}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau[\dot{\mathcal{Q}}(\tau)]^2. \tag{2.6.10}$$

ここで **Euclid エネルギー保存則** (2.6.1) に注意すれば，

$$B = S[\mathcal{Q}], \tag{2.6.11}$$

ただし

$$S[q] := \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\left\{\frac{1}{2}[\dot{q}(\tau)]^2+V(q(\tau))\right\}. \tag{2.6.12}$$

右辺の被積分函数は架空粒子の Lagrangian と解釈できる（なぜなら $V=-(-V)$）．$S[q]$ は **Euclid 作用汎函数** (Euclidean action functional) と呼ばれる[*36]．式 (2.6.11) は，この汎函数に跳返を代入した値が B であることを示す．それゆえ B を<u>**跳返作用**</u>(bounce action) と呼ぶ．

$\tau=\pm\infty$ で 0 となる滑らかな函数の集合（函数空間）を $\mathcal{F}_\infty$ と書く．

$$\mathcal{F}_\infty := \{q \mid q(\pm\infty)=0\}\ . \tag{2.6.13}$$

---

*35 “虚時間” と呼ばれることもある．とはいっても $\tau\in\mathbf{R}$.

*36 汎函数の<u>変数</u>を［ ］でくくる．$S[q]$ の<u>変数</u> q は函数であり，特定の時刻 τ における q の値が $q(\tau)$ である (付録 C).

これを $S[q]$ の定義域とすれば，跳返は $S[q]$ の非自明な*37停留点である．

$$\left.\frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau)}\right|_{q=\mathcal{Q}} = 0\,, \tag{2.6.14}$$

$$\mathcal{Q}(0) = 1\,, \quad \dot{\mathcal{Q}}(0) = 0\,. \tag{2.6.15}$$

ただし記号 $|_{q=\mathcal{Q}}$ は，微分を実行してから $q=\mathcal{Q}$ と置くことを示す．特に $V=V^{\mathrm{SBS}}$ の場合の跳返は

$$\mathcal{Q}^{\mathrm{SBS}}(\tau) = \left(\cosh\frac{\omega_0\tau}{2}\right)^{-2}\,. \tag{2.6.16}$$

I についても同様の解釈がなされる．B に関する議論の至るところ，B を I，$\mathcal{Q}$ を $\mathcal{Q}_I$ と書き直した上で，以下の変更をすればよい．式 (2.6.2) と (2.6.15) の代わりに

$$\mathcal{Q}_I(0) = 0, \quad \dot{\mathcal{Q}}_I(0) > 0, \tag{2.6.17}$$

式 (2.6.3) の代わりに

$$\tau = \int_0^{\mathcal{Q}_I(\tau)} \frac{dq}{\{2V(q)\}^{1/2}}\,, \tag{2.6.18}$$

かつ，$S[q]$ の定義域として $\mathcal{F}_\infty$ の代わりに

$$\tilde{\mathcal{F}}_\infty := \{q \mid |q(\pm\infty)| = 1\}\,. \tag{2.6.19}$$

軌道 $\mathcal{Q}_I(\tau)$ を図 2.10 に示す．その“作用密度”(Euclidean Lagrangian)

$$\frac{1}{2}[\dot{\mathcal{Q}}_I(\tau)]^2 + V(\mathcal{Q}_I(\tau)) \tag{2.6.20}$$

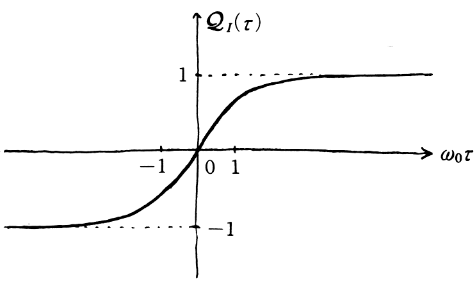


図 2.10　瞬子

*37　非自明とは $\mathcal{Q}\neq 0$ ($\mathcal{Q}(\tau)$ が恒等的には 0 でない) の意．条件 $\mathcal{Q}(0)=1\neq 0$ がこれを保証．

はτ軸上の幅ω_0^{-1}程度の領域に局在している，つまり，ω_0^{-1}に比べて充分長い時間尺度で見れば，$\tau \sim 0$の"瞬間"にのみ正の値を持ち，それ以外のときは0である．それゆえ$\mathcal{Q}_I$を<u>**瞬子**</u>(instanton)と呼ぶ[*38]．特に$V = V^{\mathrm{SSDW}}$の場合の瞬子は

$$\mathcal{Q}_I^{\mathrm{SSDW}}(\tau) = \tanh\frac{\omega_0\tau}{2}\ . \tag{2.6.21}$$

作用密度がEuclid時間軸上で局在しているという性質は跳返$\mathcal{Q}$にも当てはまるから，$\mathcal{Q}_I$と$\mathcal{Q}$をひっくるめて**インスタントン**と称する文献もある．確かに，本節に述べた範囲に限れば両者の類似点のみが目立つ．しかし，エネルギー分裂と崩壊とでは物理的内容が大いに異なる．これを反映して，$\mathcal{Q}_I$と$\mathcal{Q}$にまつわる理論の性格は全く異なる．その差異を見落として無用の概念的混乱に陥らぬよう，跳返といえば$\mathcal{Q}$，瞬子といえば$\mathcal{Q}_I$と，両者を明確に区別する方がよい．

演習問題

2.1　$V(q;\varepsilon)$が，qの4次多項式であってかつ条件

$$V(-1;\varepsilon)=0\ ,\quad V(1;\varepsilon)=-\varepsilon\ ,\quad V'(\pm1;\varepsilon)=0\ ,\quad V(q;0)=V^{\mathrm{SSDW}}(q)$$

を満たすとすれば$V(q;\varepsilon)$は$V^{\mathrm{STDW}}(q;\varepsilon)$ (<u>special tilted double well</u>)に等しいことを示せ．ただし

$$V^{\mathrm{STDW}}(q;\varepsilon) := V^{\mathrm{SSDW}}(q) - 4\varepsilon\left(\frac{q+1}{2}\right)^3 + 3\varepsilon\left(\frac{q+1}{2}\right)^4\ . \tag{2.6.22}$$

2.2　(1) $V^{\mathrm{STDW}}(q;\varepsilon)$を$q=\pm1$の近傍で調和近似して得られる$V_\pm^{\mathrm{HO}}(q;\varepsilon) =: \frac{1}{2}\omega_\pm^2(q\mp1)^2$を考え，それぞれのもとでの基底状態を$|\pm'\rangle$とする．この二つの状態で張られる2次元Hilbert空間の正規直交基底$|\pm\rangle$を，$\||+\rangle-|+'\rangle\|^2+\||-\rangle-|-'\rangle\|^2$が最小となるように定めよ．

(2) これを用いて二状態近似のHamiltonian(2.2.3)を導け．特に，準古典的状況

---

*38　詳しくは例えば，崎田文二・吉川圭二: 径路積分による多自由度の量子力学, 岩波書店 (1986), 第8章.

かつ $0<\varepsilon\ll 1$ の場合に，δ と Δ を h と ε で表せ.

2.3　(1) Hamiltonian(2.2.3) の固有状態と固有値を求めよ.

(2) それを用いて $|\psi(t)\rangle$ と $\mathcal{P}_+(t)$ を計算せよ.

(3) 初期状態が $|-'\rangle$ であった場合に，時刻 t に状態 $|+'\rangle$ に見出される確率 $\mathcal{P}_{+'}(t)$ を求めよ．ただし $|\pm'\rangle$ は問 2.2 で定義された状態である.

2.4　確率流 (2.2.23) を詳しく計算し図示せよ.

2.5　素朴 WKB 法を用いて (2.4.1) および (2.4.5) $(\times(e/\pi)^{1/2})$ を導け.

2.6　MQT を "準安定井戸内で何度も振動した挙句，たんこぶ障壁を自由トンネルする現象" と捉える見方はどのような状況下で妥当か.

2.7　$g_N(\tau):=N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\cos(\sqrt{n}\,\tau)$ の Poincaré 周期 $\tau_{\mathrm{P}}^{(\epsilon)}$ を，ϵ と N を適当に採って当たってみよ.

2.8　自由粒子の Gauss 波束は時間が経つにつれて単調に拡がるのが普通である．しかし，必ずしもそうとは限らない．いったん収縮し，しかる後に拡がるような Gauss 波束を作れ.

2.9　(2.6.16) と (2.6.21) を示し，一般のポテンシャルの場合についても図 2.9・2.10 を確かめよ．$\omega_0\tau\gg 1$ での漸近形を一般に定めよ.

3 巨視的トンネル現象候補系

MQP 候補系の幾つかを紹介する．それぞれの系の標準的物性に関しては，予備知識がなくても分かるよう雑駁な説明を試みるが，正確な説明とは言い難い．不満足な読者はそれぞれの専門解説書を見られたい*1．

3.1 SQUID

SQUID*2 とは，超伝導体で環を作り，その一カ所で，わざと超伝導性を壊したものである．例えば図 3.1 の環は超伝導 Nb でできており，斜線部に酸化 Al 膜が挿入されている．この膜部分には超伝導性がない（正確には超伝導性が少し浸み出してきている）．図 3.1 で，酸化 Al 膜を介して超伝導体の上部と下部が接している部分は Josephson 接合と呼ばれる．図の例が示すように，接合部分の厚さは環の全長に比べて非常に小さい．まずこの接合部分について説明しよう．

---

*1　参考書等に当たると複数の文献が引用されており，その文献を見るとまたと，読むべき文献数は鼠算で増える（発散の困難）．ある程度深く考えたら，ひとまず分かった振りをして先に進まねば何ともならぬ（無知の繰り込み）．どこで折り合いを付けるか，そのさじ加減は難しい．折に触れて幾度となく立ち戻る，あたかも無限次元の Klein の壺の表面を経巡るが如く，同じ地点でも以前とは異なる面に立ち戻る，そうやって次第に理解を深めていく以外に仕方がなかろう．

*2　以下に述べるのは，正確には rf-SQUID と呼ばれる．SQUID は superconducting quantum interference device（**超伝導量子干渉計**）の頭文字である（脚が 10 本あるわけではない）．ただし，この“干渉”は第一種巨視的量子現象（第 1.3 節）の意味での干渉効果を指す．SQUID および超伝導一般について詳しくは例えば，中島貞雄：超伝導入門，培風館 (1971)；恒藤敏彦：超伝導・超流動，岩波書店 (1995).

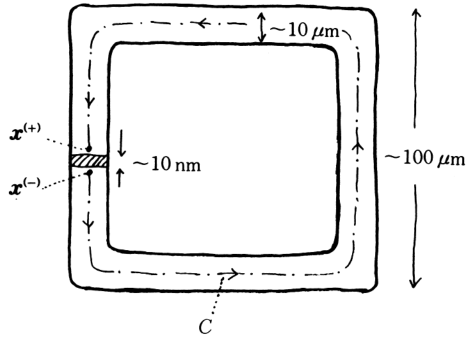


図 3.1　典型的な SQUID

3.1.1　Josephson 接合と SQUID の等価回路

接合部分は三つの機能を兼ね備えていると考えてよい．第一に，**Josephson 電流**と呼ばれる超伝導電流 $I_J(t)$ を通す機能である．一般に超伝導状態は **Ginzburg-Landau 秩序場** (order-parameter field) $\Psi_{GL}(\boldsymbol{x},t)$ で特徴付けられる．図 3.1 の Nb の超伝導体の場合には，秩序場は 1 個の複素数である．

$$\Psi_{GL}(\boldsymbol{x},t) \equiv |\Psi_{GL}(\boldsymbol{x},t)|\exp\{i\theta(\boldsymbol{x},t)\}\ . \qquad (3.1.1)$$

つまり秩序場には位相 $\theta(\boldsymbol{x},t)$ がある．環の中心線 C (図 3.1 の一点鎖線)に垂直な断面内では $\theta(\boldsymbol{x},t)$ は場所 $\boldsymbol{x}$ によらないとみなしてよい．以下，C は反時計回りに向き付けられているとし，その始点(接合の下端)を $\boldsymbol{x}^{(-)}$，終点(接合の上端)を $\boldsymbol{x}^{(+)}$ とすれば，接合の両端の位相差 $\theta(t)$ を次式で定義することができる．

$$\theta(t) := \theta(\boldsymbol{x}^{(-)},t) - \theta(\boldsymbol{x}^{(+)},t)\ . \qquad (3.1.2)$$

これを用いて，Josephson 電流は

$$I_J(t) = -I_c \sin\theta(t) \qquad (3.1.3)$$

と表される．電流の符号は，接合の上端から下端に向かう場合を正と採った．I_c は，接合の詳細(超伝導体の種類，接合を構成する物質，接合部の厚さや形状など)に依存する定数である．接合を流れる超伝導電流と位相差との関係を与える上式は，**Josephson の電流・位相関係式** (Josephson current-phase relation) と呼ばれる．Josephson 電流は，接合の両端に電位差がない状態で流

れ，その最大値は上式から明らかな通り I_c である．したがって，I_c 以上の電流を流そうとすると超伝導電流だけではまかないきれず，電位差が生ずる[*3].

第二に，接合部分は一種の蓄電器としても機能する．つまり，接合の両端に電荷が溜まり得る．接合部分の有効自己静電容量を $\mathcal{C}$，接合の上端の電荷を $Q(t)$ (したがって下端の電荷は $-Q(t)$) とする．

第三に，接合部分は通常の抵抗としても機能する．つまり，接合の両端に電位差 $\mathcal{V}(t)$ が発生すれば，それに比例した電流 $I_\Omega(t)$ が接合を流れる．以下，接合部分の有効抵抗を $\mathcal{R}$ とし，電位の原点を適当に採って接合の上端の電位を $\mathcal{V}(t)/2$（したがって下端の電位は $-\mathcal{V}(t)/2$）とする．いうまでもなく

$$Q(t) = \mathcal{C}\mathcal{V}(t)\ , \quad I_\Omega(t) = \mathcal{V}(t)/\mathcal{R}\ . \tag{3.1.4}$$

この $I_\Omega(t)$ は超伝導電流ではなく，Joule 熱（したがってエネルギー散逸）を伴う通常の Ohm 電流 (Ohmic current) である．ゆえに，**揺動散逸定理**の教える通り，揺らぎとしての雑音電流 (Nyquist current) も接合を流れるはずである．これを $I_N(t)$ とする．

SQUID 環には，その幾何学的形状によって決まる自己誘導係数 (self inductance) がある．これを $\mathcal{L}$ と書く．以上に述べたことをまとめて，SQUID を図 3.2 に示す等価回路で表すことができる．図には，接合を流れる電流 $I_J(t)$, $I_\Omega(t)$, $I_N(t)$ および環に沿って流れる超伝導電流 $I(t)$ とそれぞれの方向も記してある．接合部上端に着目すれば，期間 $(t, t+dt)$ に流れ込む電荷は $I(t)dt$，流

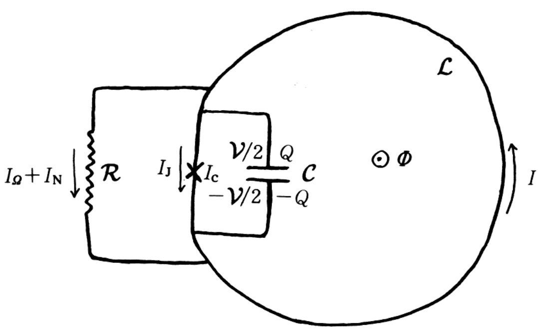


図 3.2 SQUID の等価回路

*3 I_c の添字 c は，この意味での臨界値 (critical value) であることを示す．

れ出る電荷は $\{I_{\rm J}(t)+I_{\Omega}(t)+I_{\rm N}(t)\}dt$ であるから，電荷保存則により

$$\dot{Q}(t)=I(t)-I_{\Omega}(t)-I_{\rm J}(t)-I_{\rm N}(t)\ . \tag{3.1.5}$$

3.1.2　位相差と磁束

環に電流が流れれば環を貫く磁場が生ずる．以下では外部から磁場がかけられた状況を念頭に置き，環を貫く全磁束*4を $\Phi(t)$，磁場を記述するヴェクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ とする．超伝導体内の点 $\boldsymbol{x}$ における超伝導電流密度 $\boldsymbol{J}_{\rm s}(\boldsymbol{x},t)$ は，秩序場によって次のように表される．

$$\boldsymbol{J}_{\rm s}(\boldsymbol{x},t)=\frac{(-2e)}{m^*}\,\Re\left[\Psi_{\rm GL}^*(\boldsymbol{x},t)\left\{\frac{\hbar}{i}\nabla-(-2e)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\right\}\Psi_{\rm GL}(\boldsymbol{x},t)\right]\ . \tag{3.1.6}$$

これは量子力学における確率流の式 (2.2.23) と同様の形をしている（電磁場中の電子の場合であれば，同式の $\dfrac{\hbar}{i}\nabla$ に相当する部分も $\dfrac{\hbar}{i}\nabla-(-e)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ で置き換えられる*5）．確率流の場合と同じく，(3.1.6) は**ゲージ不変**である．つまり，同式の右辺を仮に $\mathcal{J}_{\rm s}\{\Psi_{\rm GL},\boldsymbol{A}\}$ と書けば，その値は，**ゲージ変換**

$$\tilde{\Psi}_{\rm GL}(\boldsymbol{x},t)=\Psi_{\rm GL}(\boldsymbol{x},t)\exp\{-i\chi(\boldsymbol{x})\}\ , \tag{3.1.7}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\hbar}{2e}\nabla\chi(\boldsymbol{x}) \tag{3.1.8}$$

（ただし $\chi(\boldsymbol{x})$ は勝手な滑らかな函数）によって変わらない．

$$\mathcal{J}_{\rm s}\{\tilde{\Psi}_{\rm GL},\tilde{\boldsymbol{A}}\}=\mathcal{J}_{\rm s}\{\Psi_{\rm GL},\boldsymbol{A}\}\ . \tag{3.1.9}$$

超流動を担っているのが個々の電子ではなく電子対 (Cooper pair) であることを反映して，電荷 $(-2e)$ が登場している．正定数 m^* は電子対の有効質量と呼ばれる．ただし，$\Psi_{\rm GL}(\boldsymbol{x},t)$ は量子力学の波動函数ではなく*6，式 (3.1.6) は確率流ではなくて現実の電流を表す．これに (3.1.1) を代入すれば

$$\boldsymbol{J}_{\rm s}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{2e}{m^*}\,|\Psi_{\rm GL}(\boldsymbol{x},t)|^2\{\hbar\nabla\theta(\boldsymbol{x},t)+2e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\}\ . \tag{3.1.10}$$

---

*4　符号は図 3.2 の紙面上向きを正とする．

*5　電子の電荷を $-e$ と書く．

*6　Ginzburg-Landau 秩序場が“巨視的波動函数”と呼ばれることもあるが，これは誤解を招きかねない呼称であり，使わない方がよい．

さて磁場は，超伝導体表面から**磁場侵入長** (London penetration depth) λ_L 程度の距離までしか超伝導体内に侵入できない(**Meissner 効果**)．したがって，環の太さ d が λ_L に比べて充分大きいものとすれば，磁場は環の中心線 C には達し得ない．電流は磁場と相伴うものであるから，C 上における超伝導電流密度は 0 である．また，超伝導臨界温度よりも充分低い温度においては，超伝導秩序が発達していて，少なくとも C 上では $|\Psi_{\rm GL}(\boldsymbol{x},t)| \neq 0$. ゆえに (3.1.10) 式右辺の $\{\cdots\}$ は C 上で 0 である．これを C 沿いに一周積分すると

$$\int_C d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\hbar}{2e}\int_C d\boldsymbol{x}\cdot\nabla\theta(\boldsymbol{x},t)\ . \tag{3.1.11}$$

積分路 C は点 $\boldsymbol{x}^{(-)}$ から $\boldsymbol{x}^{(+)}$ へと向き付けられているから，右辺の積分は $-\theta(t)$ に等しい．一方，左辺においては，$\boldsymbol{x}^{(+)}$ から $\boldsymbol{x}^{(-)}$ に至る接合部内の微小径路を C に付け加えて積分路を閉じることが許される[*7]．つまり，左辺は環を貫く全磁束 $\Phi(t)$ に等しい．したがって

$$\theta(t) = 2\pi\Phi(t)/\Phi_0\ , \tag{3.1.12}$$

ただし

$$\Phi_0 := 2\pi\hbar/2e \tag{3.1.13}$$

は**磁束量子** (flux quantum または fluxon) と呼ばれる．つまり位相差 θ の実体は磁束であり，単なる角度ではない．それゆえ，例えば θ と $\theta+2\pi$ は物理的に異なる状況に対応する[*8]．

式 (3.1.12) と Faraday の法則

$$\dot{\Phi}(t) = -\mathcal{V}(t) \tag{3.1.14}$$

を組み合わせると

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{2\pi}{\Phi_0}\mathcal{V}(t) = -2e\mathcal{V}(t)/\hbar\ . \tag{3.1.15}$$

これは **Josephson の加速方程式** (Josephson acceleration equation) と呼ばれる．

---

*7　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ は $\boldsymbol{x}$ の滑らかな函数であるとして一般性を失わない．

*8　これに対し，いわゆる CBJJ(current-biased Josephson junction) における位相差は単なる角度である．

3.1.3　磁束の運動方程式

環を貫く磁束のうち，外部磁場(時間によらないとする)に起因する部分を $\Phi_{\rm ex}$ とすれば*9

$$\Phi(t) = \Phi_{\rm ex} + \mathcal{L}I(t) \ . \tag{3.1.16}$$

この式を (3.1.5) と組み合わせ，かつ (3.1.4), (3.1.14), (3.1.15) を用いて変数をすべて $\Phi(t)$ で表すと

$$\mathcal{C}\ddot{\Phi}(t) + \frac{1}{\mathcal{R}}\dot{\Phi}(t) + I_{\rm c}\sin\left(2\pi\frac{\Phi(t)}{\Phi_0}\right) + \frac{1}{\mathcal{L}}(\Phi(t) - \Phi_{\rm ex}) = I_{\rm N}(t) \ . \tag{3.1.17}$$

この方程式は，摩擦を考慮した粒子の運動方程式の形をしており，右辺は揺動力と解釈できる．つまり Langevin 方程式である(第 5.6 節)．

以下，無揺動($I_{\rm N}=0$) 無散逸($\mathcal{R}=\infty$) という*10理想化された場合を考えよう．すると

$$\mathcal{C}\ddot{\Phi}(t) + I_{\rm c}\sin\left(2\pi\frac{\Phi(t)}{\Phi_0}\right) + \frac{1}{\mathcal{L}}(\Phi(t) - \Phi_{\rm ex}) = 0 \ . \tag{3.1.18}$$

これは Newton の運動方程式の形をしており，Lagrangian

$$L(\Phi, \dot{\Phi}) := \frac{1}{2}\mathcal{C}\dot{\Phi}^2 - U(\Phi) \tag{3.1.19}$$

から最小作用の原理によって導かれる．ただし

$$U(\Phi) := \frac{1}{2\mathcal{L}}(\Phi - \Phi_{\rm ex})^2 - \frac{I_{\rm c}\Phi_0}{2\pi}\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \ . \tag{3.1.20}$$

したがって Φ に共役な運動量は

$$P := \partial L(\Phi, \dot{\Phi})/\partial\dot{\Phi} = \mathcal{C}\dot{\Phi} \tag{3.1.21}$$

で与えられ，(3.1.19) に対応する Hamiltonian H_Φ は

$$H_\Phi := \left\{P\dot{\Phi} - L(\Phi, \dot{\Phi})\right\}_{\dot{\Phi}=P/\mathcal{C}} = \frac{1}{2\mathcal{C}}P^2 + U(\Phi) \ . \tag{3.1.22}$$

むろん，(3.1.19) 式右辺に勝手な定数を掛けても (3.1.18) が導かれるが，

---

*9　接合部の厚さが環の全長に対して非常に小さいから，式 (3.1.16) が良い近似で成立する．

*10　抵抗が無限大すなわち散逸がないというと奇妙に聞こえるかもしれないが，$\mathcal{R}=\infty$ なら Ohm 電流が流れないから Joule 熱も発生しない．

(3.1.19) にはその各項に明確な物理的意味付けができるという利点がある.

$$\frac{1}{2}\mathcal{C}\dot{\Phi}^2 = \frac{1}{2}\mathcal{C}\mathcal{V}^2 = \frac{Q^2}{2\mathcal{C}}$$

= 接合部端に溜まった電荷に起因する電気的エネルギー, (3.1.23)

$$\frac{1}{2\mathcal{L}}(\Phi - \Phi_{\mathrm{ex}})^2$$ = 環を流れる電流に起因する磁気的エネルギー. (3.1.24)

式 (3.1.20) の右辺第 2 項は Josephson 接合に特有の項であり, **Josephson 結合エネルギー** (Josephson-coupling-energy) と呼ばれる. 接合の存在に起因するエネルギーを超伝導の微視的理論から計算すると, まさしくこの形になる.

電気的エネルギーと磁気的エネルギーがそれぞれ運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに対応するのは, 何も SQUID に特有のことではなく, 真空中の電磁力学の正準理論において馴染みのことである[*11]. 式 (3.1.21) は, 磁束に共役な運動量が電荷に他ならないことを示し[*12], これに対応して式 (3.1.22) は, 磁束の運動を律する有効慣性質量[*13]が静電容量であることを示す. 言葉を濫用して, H_Φ, $U(\Phi)$ をそれぞれ磁束 Hamiltonian, 磁束ポテンシャルと呼ぶ.

---

*11 真空中における電磁場のエネルギー密度 $\{(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t))^2+(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t))^2\}/2$ をヴェクトルポテンシャルで表せば(ただし [速さ] の単位として光速を使う) $\{(\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t))^2+(\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t))^2\}/2$ となり, 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の形(しかも調和振動子の形)になっていることが一目瞭然である.

*12 磁束が位相差と関係付けられていることと, 電荷が蓄電器両端の電子数の差であることから, 磁束と電荷の共役関係を “位相と粒子数の共役関係” の一種と見ることも的外れではなかろう. ただし, 後者における “粒子数” が正に限られるのに対し電荷は負にもなり得ること, そしてすでに述べた通り, 磁束と関連付けられた位相差 θ は単なる角度ではないこと, この 2 点において両者は決定的に異なる. “位相と粒子数の共役関係” というのは明確に定式化された概念ではない.

*13 もちろん, 実際の次元は [質量] ではない.

3.1.4　素朴量子論

以上は古典的な現象論である*14．ここで大胆に，磁束 Φ は以下の量子力学に従うものと仮定する．

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}_\Phi|\psi(t)\rangle\ , \tag{3.1.25}$$

$$\hat{H}_\Phi := \frac{1}{2\mathcal{C}}\hat{P}^2 + U(\hat{\Phi})\ , \tag{3.1.26}$$

$$[\hat{\Phi}, \hat{P}] = i\hbar\ . \tag{3.1.27}$$

記号の意味は通常の粒子の量子力学の場合と同様である．つまり $|\psi(t)\rangle$ は時刻 t における磁束の量子力学的状態であり，

$$\hat{\Phi}|\Phi\rangle = \Phi|\Phi\rangle \tag{3.1.28}$$

を満たす $|\Phi\rangle$ を用いれば，$|\psi(t)\rangle$ の Φ 表現波動函数

$$\psi(\Phi, t) := \langle\Phi|\psi(t)\rangle \tag{3.1.29}$$

は，時刻 t にて磁束の値が Φ に見出される確率振幅を与える．この仮定は，本章の現象論の段階では明確な根拠を欠き，楽観的な期待というべきものである*15．

無次元量

$$\theta \equiv 2\pi\Phi/\Phi_0, \quad \theta_{\mathrm{ex}} \equiv 2\pi\Phi_{\mathrm{ex}}/\Phi_0 \tag{3.1.30}$$

を用いると磁束ポテンシャル (3.1.20) を次のように書き直すことができる．

$$U(\Phi) = \frac{I_{\mathrm{c}}\Phi_0}{2\pi}\tilde{U}(\theta)\ , \tag{3.1.31}$$

$$\tilde{U}(\theta) := \frac{\gamma}{2}(\theta - \theta_{\mathrm{ex}})^2 - \cos\theta\ , \tag{3.1.32}$$

$$\gamma \equiv \Phi_0/2\pi\mathcal{L}I_{\mathrm{c}} = I_{\Phi_0}/2\pi I_{\mathrm{c}}\ , \quad I_{\Phi_0} \equiv \Phi_0/\mathcal{L}\ . \tag{3.1.33}$$

---

*14　超伝導状態の存在と，その複素秩序場による記述の正当性は，古典論からは導かれない．しかし，いったんこれが量子力学によって保証されれば，あとは秩序場を古典的な場とみなして議論してよい，そう考えたのが 3.1.3 節の古典論である．この事情は，例えば原子集団の運動を古典力学で扱う古典気体論の場合と本質的に同じである．後者の場合も，原子の存在自体は量子力学によってのみ保証される．

*15　これを微視的理論から基礎付けようとすると多大の準備を要し相当に骨が折れる．その簡明な叙述は筆者の手に余るから，紙数の加減なる口実のもとに割愛する．巻末の文献[6]を参照．これで納得できるか否かについては読者の判断に委ねたい．

I_{Φ_0} は環にちょうど Φ_0 だけの磁束を生ぜしめる電流である．

定数 γ と外部磁場（つまり θ_{ex}）を調節することにより[*16]，以下のような典型的状況を実現することができる．

（イ）$\theta_{ex}=\pi$：

$$\tilde{U}(\theta)=\frac{\gamma}{2}(\theta-\pi)^2+\cos(\theta-\pi)\ . \tag{3.1.34}$$

これは $\theta-\pi$ の偶函数であり，特に $\gamma<1$ の場合に $\theta=\pi$ の近傍に着目すれば

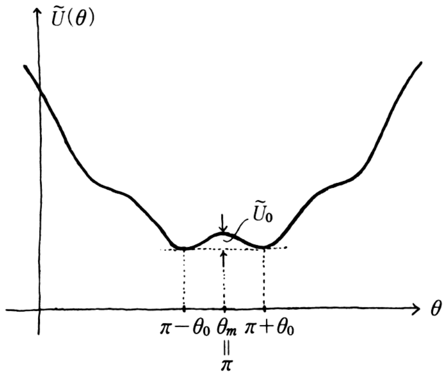


図 3.3 MQC 状況：$\theta_{ex}=\pi$

対称二連井戸となって MQC 状況が出現する（図 3.3）．

（ロ）$\gamma\ll 1$ かつ $b\equiv\gamma\theta_{ex}=\mathcal{O}(1)$ ：$\theta=\mathcal{O}(1)$ の領域に着目すれば

$$\frac{\gamma}{2}(\theta-\theta_{ex})^2\simeq\frac{\gamma}{2}\theta_{ex}^2-b\theta\ . \tag{3.1.35}$$

右辺冒頭の定数項 $\gamma\theta_{ex}^2/2$ は単にエネルギーの原点をずらすのみであり，磁束の運動には影響を与えない．以下これを省略すれば

$$\tilde{U}(\theta)\simeq-\cos\theta\ -b\theta\ . \tag{3.1.36}$$

これは**洗濯板** (washboard) と呼ばれる．特に $b\lesssim 1$ の場合には，図 3.4 の $\theta=\pi/2$ 近傍に着目すればたんこぶ坂となり，MQT 状況が出現する．

∗16 図 3.1 にて Josephson 接合の部分を dc-SQUID で置き換えても，等価回路は実効的に図 3.2 で与えられ，dc-SQUID に磁束 Φ'_{ex} を通せば実効的な I_c が Φ'_{ex} に依存する．この性質を利用して I_c を連続的に変えることができる．

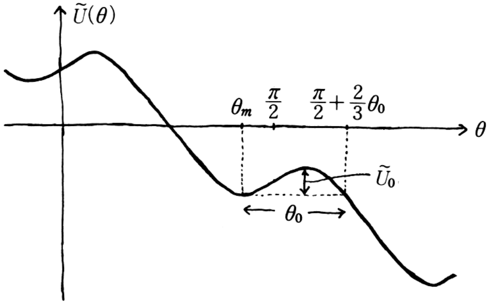


図 3.4 洗濯板: $\gamma \ll 1$ かつ $b=\mathcal{O}(1)$

すでに磁束の単位として Φ_0 を用い，無次元変数 θ を導入したが，図 **3.3**・**3.4** に示した MQC・MQT 状況を考察する際には，

$$\delta\Phi := (\Phi_0/2\pi)\theta_0 \tag{3.1.37}$$

を単位に採る方がさらに便利である．これは図のポテンシャル障壁の幅 θ_0 に相当する磁束空間における距離であり，第 2.1 節の R_0 に相当する．また，そこの M に相当するのが $\mathcal{C}$ である．同節に従って標準化すれば

$$q = (\theta - \theta_m)/\theta_0\ , \tag{3.1.38}$$

$$\tau_0 = (\mathcal{C}/U_0)^{1/2}\delta\Phi\ . \tag{3.1.39}$$

ゆえに

$$h \equiv \frac{\hbar}{\tau_0 U_0} = \frac{2e}{\theta_0\sqrt{\mathcal{C}U_0}} = \frac{h_0}{\theta_0\sqrt{\tilde{U}_0}}\ ,\quad h_0 \equiv 2\left(\frac{e^2/\mathcal{C}}{I_c\Phi_0/2\pi}\right)^{1/2}\ . \tag{3.1.40}$$

このように，h は見かけ上 $\hbar$ を含まない形にも書くことができる(第 2.1 節末尾参照)．Josephson 接合を構成する原子(または電子)の個数を N として，$\mathcal{C}=\mathcal{O}(N)$, $I_c=\mathcal{O}(N)$ と見積もれば確かに $h_0=\mathcal{O}(N^{-1})$．　しかし，図 3.1 のような微小接合の場合には h_0 の値はそれほど小さくなく，かつ，以下に述べる通り，定数 γ を調節することによって 0.1 程度の h を達成することは充分に可能である．式 (2.4.1), (2.4.5) の I, B の値はいずれもおよそ 1 程度であるから，これはトンネル現象が検出し得る状況といえる．

仮に図 3.1 の SQUID で MQC が実現されたとして，第 1.3 節で導入した猫性度 $\boldsymbol{D}$ を見積もってみよう．これは，磁束量子 Φ_0 相当の電流 I_{Φ_0} に寄与する

電子数の程度であり，$D \sim 10^{15}$ と見積もられる．このように多数の電子が関与しているにもかかわらず，当該のトンネル現象を制御するポテンシャル障壁の大きさ U_0 は，温度にして 10 K の程度である．これは例えば水素原子における 1 個の電子の束縛エネルギー(10^5 K 程度)に比べて圧倒的に小さい．これは (1.4.16) の一側面を具体的に述べたものであるが，ここが大切な点である．

典型的な場合について θ_0，$\tilde{U}_0$ を具体的に計算して h を求めておこう．

（イ′）MQC 状況：$\gamma \lesssim 1$

式 (3.1.34) を $\vartheta \equiv \theta - \pi$ で展開すれば

$$\tilde{U}(\theta) = 1 - \frac{1}{2}(1-\gamma)\vartheta^2 + \frac{1}{4!}\vartheta^4 - \frac{1}{6!}\vartheta^6 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\theta_0^4}{4!}(-2q^2 + q^4) - \frac{\theta_0^6}{6!}q^6 + \cdots , \tag{3.1.41}$$

$$q \equiv \vartheta/\theta_0 , \quad \theta_0 \simeq \{6(1-\gamma)\}^{1/2} . \tag{3.1.42}$$

したがって，$|q| \lesssim 1$ の領域に着目して $\mathcal{O}((1-\gamma)^3)$ を無視すれば特殊対称二連井戸となり，

$$\tilde{U}_0 \simeq \frac{3}{2}(1-\gamma)^2 , \quad h \simeq \frac{h_0}{3(1-\gamma)^{3/2}} . \tag{3.1.43}$$

（ロ′）MQT 状況：$b \lesssim 1$

式 (3.1.36) を $\vartheta \equiv \theta - \pi/2$ で展開すれば

$$\tilde{U}(\theta) \simeq -\frac{\pi}{2}b + (1-b)\vartheta - \frac{1}{3!}\vartheta^3 + \frac{1}{5!}\vartheta^5 + \cdots . \tag{3.1.44}$$

したがって，$\mathcal{O}((1-b)^{5/2})$ を無視すれば特殊たんこぶ坂となり，

$$\theta_m \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{3}, \quad \theta_0 \simeq \{18(1-b)\}^{1/2}, \tag{3.1.45}$$

$$\tilde{U}_0 \simeq \frac{2}{3}\{2(1-b)\}^{3/2}, \quad h \simeq \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{h_0}{\{2(1-b)\}^{5/4}} . \tag{3.1.46}$$

本節の素朴量子論の結論は，意外にも実験によって支持されている．MQT 状況を設定して崩壊率を測定し，図 2.7 に相当する結果が得られている．また，外部磁場を制御して θ_{ex} の値を π 付近で変化させることにより，第 2.3 節末尾に述べた共鳴トンネル実験を行うことができる．これは例えば図 3.1 の

SQUID において実行され，図 2.8 に相当する結果が得られている．実験で得られた山の間隔が，ポテンシャル (3.1.20) の左右井戸のエネルギー準位を数値的に計算した結果から期待される値とぴったり一致したのである．(山の幅は，式 (2.2.25) から期待されるものに比べて遙かに大きな値が観察され，これについては未解明の点も多いが，内在的な原因としては，右井戸の励起状態に遷移したあと同井戸の基底状態に落ちる効果(寿命効果)あるいは有限温度効果などが考えられている．)

3.1.5　摩擦係数

式 (3.1.17) について補足しておこう．時間の単位として τ_0 を採り，$\theta(t)$ に対する無次元の式に書き直すと

$$\ddot{\theta}(t)+\eta\dot{\theta}(t)+\frac{(\Omega_0\tau_0)^2}{\gamma}\sin\theta(t)+(\Omega_0\tau_0)^2(\theta(t)-\theta_{\rm ex})=r_{\rm N}(t)\ , \quad (3.1.47)$$

$$\Omega_0\equiv(\mathcal{LC})^{-1/2}\ ,\quad r_{\rm N}(t)\equiv\frac{2\pi}{\Phi_0}\frac{\tau_0^2}{\mathcal{C}}I_{\rm N}(t)\ , \quad (3.1.48)$$

$$\eta:=\frac{\tau_0}{\mathcal{RC}}=\frac{(\delta\Phi)^2}{\mathcal{R}\hbar}h=\frac{\theta_0^2}{8\pi}\frac{\mathcal{R}_{\rm H}}{\mathcal{R}}h\ , \quad (3.1.49)$$

ただし

$$\mathcal{R}_{\rm H}:=2\pi\hbar/e^2\simeq 2.58\times10^4\Omega \quad (3.1.50)$$

は**量子 Hall 抵抗** (quantum Hall resistance) である．式 (3.1.47) により，摩擦の大きさを定量的に表すのは無次元量 η であることが分かる．η を**摩擦係数**と呼ぶ．

基底エネルギー分裂や崩壊率の値は，環境の影響によって，式 (2.4.1), (2.4.5) から期待されるものよりも小さくなるのが一般的である(第 6 章，第 7 章)．トンネル現象に対する環境効果も η の函数として定量的に表される．SQUID の利点は，少なくとも経験的には，抵抗 $\mathcal{R}$ の値(したがって η の値)をほとんど望み次第に制御できることである．実験で測定された崩壊率の低温極限値(図 2.7 の低温域における一定値)は，第 7 章の **Caldeira-Leggett 公式**(環境効果を考慮した量子崩壊率)と良く一致し，$\mathcal{R}$ を大きくするにつれて (2.4.5) の値に近づくことが立証されている．

本節に述べたSQUIDは，現実のSQUIDを非常に単純化した模型*[17]であり，実のところ$\mathcal{R}^{-1}$の起源には不明の点も多い．考えられるのは

（1） 超伝導体内の準粒子(ただし，これは温度を下げるにつれて消失)

（2） 電磁波遮蔽用の金属薄膜*[18]

などである*[19].

3.2 ^{3}He−^{4}He 混合液

3.2.1 ^{3}He−^{4}He 混合液における相分離現象

Heには2種類の安定な同位体(^{3}Heと^{4}He)がある．両者とも絶対零度まで凍結することなく液状に留まる物質である．0.8K以下の温度では両者を勝手な割合で混合することはできず，特に0.1K以下では，液体^{4}He中に溶かし得る^{3}Heの濃度は約0.06(つまり6%)以下に限られる．この飽和濃度以上の^{3}Heを溶かそうとしても，ほぼ純粋な^{3}Heの相(^{3}He濃厚相)と^{3}He濃度約6%の相(^{3}He稀薄相)とに分かれてしまう(二相分離*[20])．^{3}He濃度がわずかに(Δxだけ)飽和濃度を上回る過飽和混合液を用意し，Δxを増加させていく*[21]実験が行われた．その結果，Δxがある臨界値Δx_cに達したときに二相分離が起こることが，0.1Kから0.4mKにわたる温度範囲で確認され，しかも，10mK以下ではΔx_cが温度によらず一定($\sim 2\times10^{-3}$)であることが見出された．^{3}He−^{4}He混合液は不純物を全く含まないといってよい理想的な系であり，この実験結果

---

*17 特に抵抗の取り扱いに関して resistively shunted junction model と呼ばれる.

*18 例えば3.1.4節に述べた共鳴トンネル実験で，$\omega_0/2\pi \sim 40$ GHzを考慮して1GHz以上の電磁波を遮蔽するのに用いられたAuPd薄膜中などにも雑音(むしろ雑電)が発生し得る.

*19 CBJJにおいては，外部回路の雑音も起源となり得る.

*20 ^{3}He原子の方が^{4}He原子よりも質量が小さいから，地上の実験室では，軽い濃厚相が稀薄相の上に浮く形になる.

*21 口で言うのはたやすいが，Δxの値をいかに制御するか，それが実験の核心であり，当該の低温域で液体^{4}Heが超流動状態にあることが巧みに利用されている．すなわち超流動^{4}Heはするすると通るが^{3}Heは通り得ない濾過器(superleak：細かい孔だらけの軽石のようなもの)を容器の口に付け，それを通して超流動^{4}Heを出し入れすることにより，容器内の^{3}He濃度を変えるのである．しかも超流体のエントロピーは0であるから，この出し入れによって容器内の温度が変わることはない．超流動^{4}Heについては例えば，恒藤敏彦：前掲；山田一夫・大見哲巨：超流動，培風館(1995).

が系本来の性質を反映していることは確実である*22.

温度 β^{-1} の過飽和混合液の二相分離機構について考えよう．液体中の原子は各自勝手な熱運動をしているが，多数の ^{3}He 原子がたまたま歩調を合わせて一カ所に集まる，ということが確率的に起こり得る．集まる場所も確率的に決まる．この熱揺らぎによって，準安定状態(すなわち空間的に一様な過飽和準安定相)中に，半径 R の球状の安定相(^{3}He 濃厚相)領域が出現したとしよう．これを**泡** (bubble) と呼ぶ*23．準安定相の単位体積あたりの自由エネルギーが安定相のそれに比べて ε_b だけ大きい*24とすれば，泡が生ずることにより，泡内部で自由エネルギーが $(4\pi R^3/3)\varepsilon_\mathrm{b}$ だけ減少する*25(ε_b は過飽和度 Δx に比例して増加する)．同時に，界面(泡表面)で自由エネルギーが $4\pi R^2\sigma_\mathrm{b}$ だけ増加する．σ_b は単位面積あたりの界面エネルギー("表面張力")である．したがって，半径 R の泡が出現すると自由エネルギーは次式の $F(R)$ だけ増加する．

$$F(R) := 4\pi R^2\sigma_\mathrm{b} - (4\pi R^3/3)\varepsilon_\mathrm{b}\ . \tag{3.2.1}$$

これは図 1.4 のたんこぶ坂と同じ形(ただし $R_m=0$)をしている．山頂の位置 R_c と山の高さ F_0 は ε_b と σ_b によって決まる．半径が R_c 以下の微小泡ができたとしても，山の斜面を左に転げ落ちて $R=0$ (準安定状態)に戻ってしまうが，半径が R_c 以上の微小泡ができれば斜面を右に転げ落ちる，すなわち泡は成長する．つまり，**臨界核**(critical bubble: 半径 R_c の微小泡)が熱揺らぎによって形成されると，現実に成長し得る泡が発生し，これが二相分離の引き金となる．

---

*22　この現象の本質は以下で述べるように核形成である．一般に核形成は塵など不純物や壁を媒介にして起こる場合が圧倒的に多い．^{3}He−^{4}He 混合液の場合には，壁は ^{4}He によって優先的に覆われてしまう(He 原子は van der Waals 力によって壁に引きつけられるが，質量の大きな ^{4}He の方が零点振動が小さいため，^{3}He よりも壁に吸着されやすい)から，壁を利用して ^{3}He が析出することもない．本書で議論するのは，塵や壁などの外的要因によらず系の内在的性質のみによって起こる核形成である．これを内因性核形成(intrinsic nucleation) と呼ぶ．"一様核形成 (homogeneous nucleation)" と呼ばれることもあるが，これは壁などの影響がない場合に空間的に一様に核が形成されることを念頭に置いた呼称であり，必ずしも適切な用語ではない．内因性ならば一様であるが，逆は真ならず．

*23　液体 ^{3}He の方が混合液よりも密度が小さいことを念頭に置いた呼称．

*24　添字 b は泡の意．

*25　泡内部の自由エネルギーが体積に比例するというのは，He 原子間に働く力が短距離力だからである．このような場合には，所与の体積に対して表面積が最小になるのは球であるから，表面エネルギーを最小にすべく安定相領域は球となる確率が最大であろう．これを見越して初めから球状泡を考えたわけである．長距離力が働く場合には，泡の内部の自由エネルギーは体積のみならず泡の形にも依るから，話は異なる．例えば荷電流体においては，Coulomb 斥力の効果をできるだけ減らすべく，葉巻型楕円体となる確率が高くなろう．

その頻度 $\Gamma_{古\,\mathrm{nuc}}$ は

$$\Gamma_{古\,\mathrm{nuc}} = N_{\mathrm{nuc}}\,\nu\ \exp(-\beta F_0) \tag{3.2.2}$$

で与えられる．N_{nuc} は**核形成** (nucleation) の起こる候補地点の個数で，およそ混合液内の ^{3}He 原子の個数 ($\sim 10^{23}$) 程度，また ν は各地点において付近の原子集団が"核の形成を試みる頻度"(attempt frequency) である．"核形成を試みる"とは，濃度の局所的揺らぎ（粗密波）を引き起こすことであるから，大雑把な見積もりをすれば

$$\nu^{-1} \sim \frac{\text{平均原子間距離}}{\text{音速}} \sim \frac{2\,\text{Å}}{50\,\mathrm{m/sec}} \sim 10^{-11}\,\mathrm{sec}\,. \tag{3.2.3}$$

"準安定状態を用意してから $\Gamma_{古\,\mathrm{nuc}}^{-1}$ 程度の時間だけ待機すれば臨界核が形成される"というのが $\Gamma_{古\,\mathrm{nuc}}$ の物理的意味であり，この意味で $\Gamma_{古\,\mathrm{nuc}}^{-1}$ は準安定状態の寿命である．

さて，F_0 は ε_{b} を通じて過飽和度 Δx に依存するが，Δx が実験で得られた低温極限での臨界値 ($\sim 2\times 10^{-3}$) に等しい場合，およそ 10 K 程度と見積もられる．したがって，例えば $\beta^{-1} < 0.01$ K では

$$\Gamma_{古\,\mathrm{nuc}}^{-1} > 10^{-34} \times \exp(1000)\ \mathrm{sec}\ \sim 10^{390}\ \mathrm{year}\,. \tag{3.2.4}$$

これは現宇宙の年齢に比べても桁違いに長い．ゆえに，少なくとも 10 mK 以下では，熱揺らぎによる核形成は実験室では起こり得ない[*26]．ところが先に述べた通り，実験では 10 mK より遥かに低い温度でも二相分離が確認されている．

このような低温における二相分離の引き金として，熱揺らぎに代わり得るのは量子揺らぎである．(3.2.1) 式右辺の定数 $\sigma_{\mathrm{b}}, \varepsilon_{\mathrm{b}}$ を，それぞれの絶対零度極限の値で置き換えれば，$F(R)$ はそのままの形で力学的ポテンシャルエネルギー $U(R)$ と読み換えることができる．そして，全系（混合液）の状態を泡半径 R で代表させ，全系の状態の時間変動を，ポテンシャル $U(R)$ のもとでの粒子 (その位置座標が R) の運動と見ることができよう．すなわち，第 1.4.2 節の意味での巨視系 R が泡半径 R である．粒子の運動エネルギー（すなわち混合液の準安定状態のエネルギー）は U_0 より小さく，粒子は古典力学的には障壁を通過できないが，トンネル効果で通過することができるであろう．つまり，半径

---

*26 仮に，N_{nuc} や ν の見積もりが数桁間違っていたとしても，あるいは F_0 の値が 1 桁間違っていたとしても，この結論に変わりはない．

R_0 (図 1.4) 程度の微小泡がトンネル効果で生じ（これは**量子核形成** (quantum nucleation) と呼ばれる），その後は先に述べたように成長するであろう[*27].

3.2.2 Rayleigh-Plesset 模型

トンネル現象を記述するにはポテンシャルだけでは不充分であり，泡の**膨張収縮運動**(膨縮運動と略称)に伴う運動エネルギーが必要である．後者はすでに 80 年もの昔，Rayleigh によって導かれている[*28]．彼の考えに従えば[*29] d 次元空間における泡の膨縮運動は次の Lagrangian で記述される.

$$L(R,\dot{R}) = \frac{1}{2}M(R)\dot{R}^2 - U(R) \ , \tag{3.2.5}$$

$$M(R) := R^m \mu_{\rm b} \ , \tag{3.2.6}$$

$$U(R) := \mathcal{S}_{d-1}R^{d-1}\sigma_{\rm b} - \mathcal{B}_d R^d \varepsilon_{\rm b} \ . \tag{3.2.7}$$

$M(R)$ は泡の膨縮運動を律する有効慣性質量(泡の有効質量と略称)である[*30]．簡単のため (3.2.6) の形を仮定し，$m\,(>0)$ を質量指数と呼ぶ．$\mathcal{S}_{d-1}$ と $\mathcal{B}_d$ はそれぞれ $(d-1)$ 次元球面の面積と d 次元球の体積，

$$\mathcal{S}_{d-1} = d\mathcal{B}_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \ , \tag{3.2.8}$$

そして $\mu_{\rm b}, \sigma_{\rm b}, \varepsilon_{\rm b}$ は正定数である.

この模型(**Rayleigh-Plesset 模型**と呼ぶ)は，特に核形成を念頭に置いて考案されたものではないが，量子核形成を論ずる際に頻用されている．以下に示すように，流体中の泡に対しては $m = d = 3$ (狭義の Rayleigh-Plesset 模型)と期待される.

泡の有効質量の式 (3.2.6) を導いておこう．簡単のため単一成分の非圧縮性流体 (incompressible fluid) を考え，その中に半径 $R(t)$ の泡を想定する(空間

*27　量子揺らぎの場合には $R_{\rm c}$ には特別の意味がなく，R_0 が代役を務める.

*28　やかんの湯が沸騰するときに音を立てるのは泡が破裂するせいであろうという Reynolds の指摘を踏まえて，Rayleigh は泡の膨縮力学を考察した: Rayleigh, *On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity*, Phil. Mag. xxxiv (July-December 1917), 94.

*29　ただし，ポテンシャルに表面張力項を付け加えて膨縮力学を考察したのは M. S. Plesset, *The Dynamics of Cavitation Bubbles*, J. Appl. Mech. 16(1949), 277. が最初らしい．以下，空間次元を d に一般化して考える.

*30　泡の並進運動は考えない.

次元は d)．t は時刻である．泡の内外はそれぞれ安定相，準安定相にあるものとし，それぞれの質量密度を $\rho_<, \rho_>$ とする(添字 $<, >$ は内と外を表す(図 3.5))．この状況における流体の質量密度場は泡の中心に関して球対称である

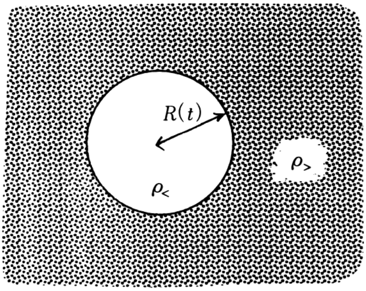


図 3.5 泡

から，それを $\rho(r,t)$ と書けば

$$\rho(r,t) \;=\; \rho_>\theta(r-R(t))+\rho_<\theta(R(t)-r)\;. \tag{3.2.9}$$

r は泡の中心からの距離，θ は踏段函数*31 である．一方，質量保存則より

$$\frac{\partial\rho(r,t)}{\partial t}+\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^{d-1}\rho(r,t)v(r,t)\right\}=0\;. \tag{3.2.10}$$

ここに $v(r,t)$ は流体の速度場の動径方向成分を表す．これら 2 式を組み合わせると

$$-(\rho_>-\rho_<)\dot{R}(t)\delta(r-R(t))+\frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^{d-1}\rho(r,t)v(r,t)\right\}=0\;. \tag{3.2.11}$$

泡表面以外の領域では，左辺第 1 項は 0，かつ密度が一定であるから

$$v(r,t)\propto r^{-(d-1)}\;:\;r\neq R(t)\;. \tag{3.2.12}$$

泡中心における速度場が有限となることを要請すれば，上式より

$$v(r,t)=0\;:\;r<R(t)\;. \tag{3.2.13}$$

---

*31 step function.

$$\theta(x):=\begin{cases}1 & :\; x>0\,,\\ 0 & :\; x<0\,.\end{cases}$$

かくて

$$v(r,t)=v_R(t)\left(\frac{R(t)}{r}\right)^{d-1}\theta(r-R(t)) \qquad (3.2.14)$$

と書くことができる．係数 $v_R(t)$ を決めるには，式 (3.2.11) から未使用情報を引き出せばよい．すなわち，同式の両辺を r について $R(t)-0$ から $R(t)+0$ まで積分し，その結果に (3.2.14) を代入すれば

$$v_R(t)=\left(1-\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)\dot{R}(t)\ . \qquad (3.2.15)$$

さて，泡の膨縮に伴う運動エネルギー L_{K} とは，元をただせば流体の運動エネルギーのはずであるから，d 次元空間の点を $\boldsymbol{x}$，体積要素を $d^d\boldsymbol{x}$ と書いて，

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{K}} &= \frac{1}{2}\int d^d\boldsymbol{x}\ \rho(r,t)\{v(r,t)\}^2 \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{S}_{d-1}\rho_{\mathrm{eff}}\{\dot{R}(t)\}^2\int_{R(t)}^{\infty}dr\ r^{d-1}\left(\frac{R(t)}{r}\right)^{2(d-1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathcal{S}_{d-1}}{d-2}\rho_{\mathrm{eff}}\{R(t)\}^d\{\dot{R}(t)\}^2\ , \end{aligned} \qquad (3.2.16)$$

$$\rho_{\mathrm{eff}} := \left(1-\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^2\rho_>\ . \qquad (3.2.17)$$

これを (3.2.5)–(3.2.6) と比べて[*32]

$$m=d,\quad \mu_{\mathrm{b}}=\frac{\mathcal{S}_{d-1}}{d-2}\ \rho_{\mathrm{eff}}\ . \qquad (3.2.18)$$

3.2.3　素朴量子論

第 2.1 節の精神で標準化する．ただし，有効質量が R に依存することを考慮して，時間の単位 τ_0 を次のように手直しする．

---

*32　この結果は $d\geqq 3$ の場合にのみ妥当である．$d\leqq 2$ では (3.2.16) の積分が発散してしまう．発散の原因は速度場が長い尾を引くことにあり，これは流体の非圧縮性（したがって無限大の音速）を仮定したことによる．もし 2 次元空間における泡の膨縮運動を扱おうとするならば，非圧縮という理想化は許されない．また，単純流体以外の系においては，泡の有効質量は一般に R の複雑な函数となる．例えば，“種結晶” に接した流体（結晶の成分を含む溶液）において，種結晶の表面に結晶が析出する現象 (crystallization) の場合，析出する結晶を半径 R の薄円盤とみなせば，$M(R)$ は $R\log R$ に比例すると考えられている．

$$M(R_0)\left(\frac{2R_0}{(m+2)\tau_0}\right)^2 = U_0 \ . \tag{3.2.19}$$

R_0, U_0 の定義は図 1.4 と同じである（ただし同図にて $R_m = 0,\ U_- = 0$）．すなわち

$$R_0 = \frac{\mathcal{S}_{d-1}\sigma_\mathrm{b}}{\mathcal{B}_d\varepsilon_\mathrm{b}} \ , \tag{3.2.20}$$

$$U_0 = U\left(\frac{d-1}{d}R_0\right) = \frac{(d-1)^{d-1}}{d^d}\frac{(\mathcal{S}_{d-1}\sigma_\mathrm{b})^d}{(\mathcal{B}_d\varepsilon_\mathrm{b})^{d-1}} \ , \tag{3.2.21}$$

$$\tau_0 = \frac{2}{m+2}\left\{\frac{d^d}{(d-1)^{d-1}}\frac{(\mathcal{S}_{d-1}\sigma_\mathrm{b})^{m-d+2}}{(\mathcal{B}_d\varepsilon_\mathrm{b})^{m-d+3}}\mu_\mathrm{b}\right\}^{1/2} \ . \tag{3.2.22}$$

これらを単位に採って

$$t := t_ヮ/\tau_0 \ , \quad q := (R/R_0)^{(m+2)/2} \ , \tag{3.2.23}$$

$$L(q,\dot{q}) := L_ヮ(R,\dot{R})/U_0 = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q) \ . \tag{3.2.24}$$

もちろん，右辺の $\dot{}$ は無次元の t に関する微分，また

$$V(q) := U(R)/U_0 = \frac{d^d}{(d-1)^{d-1}}\left((R/R_0)^{d-1} - (R/R_0)^d\right) \tag{3.2.25}$$

$$= \frac{d^d}{(d-1)^{d-1}}\left(q^{2(d-1)/(m+2)} - q^{2d/(m+2)}\right) \ . \tag{3.2.26}$$

(3.2.24) から得られる Hamiltonian から素朴に量子力学的 Hamiltonian（の q 表現）H を書き下せば (2.1.10) となる．ただし

$$h \equiv \frac{\hbar}{U_0\tau_0} = \frac{m+2}{2}\left\{\frac{d^d}{(d-1)^{d-1}}\frac{(\mathcal{B}_d\varepsilon_\mathrm{b})^{m+d+1}}{(\mathcal{S}_{d-1}\sigma_\mathrm{b})^{m+d+2}}\frac{1}{\mu_\mathrm{b}}\right\}^{1/2}\hbar \ . \tag{3.2.27}$$

$m > 0$ の場合，位置によって質量が変わる粒子の量子力学には馴染みが薄く，直観が働かない．(3.2.23) で定義された変数 q で見れば，上のように質量一定の問題となって分かりやすい．これが，R/R_0 の代わりに q を使うことにした理由である．もちろん，その皺寄せとして $V(q)$（これを<u>泡ポテンシャル</u>と呼ぶ）の形は図 1.4 の形と異なる．特に原点付近では切り立って微係数が発散する（図 3.6）．

変数 q は正の値に限られるが，原点 $q = 0$ にて波動函数に Dirichlet また

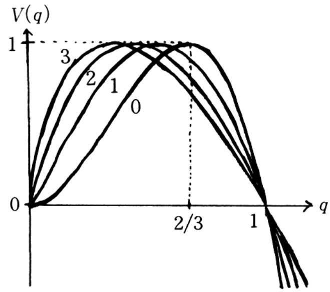


図 3.6　泡ポテンシャル($d=3$ の場合：数字は m)

は Neumann 境界条件を課せば，H は Hermite となる．いずれかの条件下で Schrödinger 方程式 (2.1.9) を素朴 WKB 法を用いて解くことにより，準基底状態の崩壊率が得られる．$d=3$ の場合の結果は

$$\Gamma \sim h^{-m/(m+4)} \exp\left[-B/h + 2bh^{-m/(m+4)} + \mathcal{O}(h^{\xi})\right] \ : \ m>0, \qquad (3.2.28)$$

$$\xi \equiv \min\left(0,\ -\frac{m-2}{m+4}\right) . \qquad (3.2.29)$$

指数函数の肩第 2 項の係数 b は $\mathcal{O}(1)$ の正数である．したがってこの結果は，$m=0$ の場合の崩壊率 (2.4.5) に比べて(h の値を共通に採って比べると)大幅に大きく，しかもその差は h が小さくなればなるほど増大する．この原因は単純である．泡ポテンシャルが原点付近で切り立っているため，$m=0$ の場合に比べて準基底状態のエネルギー(原点付近の下に尖った準安定井戸の零点エネルギー)E_0 が大きく，それゆえ，圧倒的にトンネルしやすいというわけである．不確定性関係を用いた次元解析(厳めしくいえば変分原理)により

$$E_0 \sim \min_q \left\{ \frac{h^2}{q^2} + q^{4/(m+2)} \right\} \sim h^{4/(m+4)} , \qquad (3.2.30)$$

$$S(E_0) = S(0) + \mathcal{O}(h^{4/(m+4)}) . \qquad (3.2.31)$$

上式の最後の項が (3.2.28) の指数第 2 項を与える($S(E)$ は式 (2.4.14) で定義される障壁下作用)．

(3.2.28) は泡 1 個の形成率と解釈されるから，これに N_{nuc} を掛け，かつ普通の次元に戻すべく τ_0^{-1} を掛けたものが $\Gamma_{古\ \mathrm{nuc}}$ と比較されるべき量子核形成率 $\Gamma_{量\ \mathrm{nuc}}$ を与える．

$$\Gamma_{量\,\mathrm{nuc}} \sim N_{\mathrm{nuc}}\ \tau_0^{-1} h^{-m/(m+4)} \exp\left[-B/h + 2bh^{-m/(m+4)}\right] . \qquad (3.2.32)$$

これを**修正 Lifshitz-Kagan 量子核形成率公式**と呼ぶ*33.

この公式が ^{3}He-^{4}He 混合液に当てはめられるとすれば，$m=3$ と置いて

$$h \propto \varepsilon_{\mathrm{b}}^{7/2} \propto (\Delta x)^{7/2} . \qquad (3.2.33)$$

これの逆数が指数函数の肩に載るわけであるから，量子核形成率は Δx とともに急激に増加する．したがって，事実上 Δx がある一定値に達したときに一気に核が形成されて一次相転移が起こるであろう．この理論的予想は，臨界過飽和度 Δx_{c} が 10 mK 以下で温度に依存しないという実験事実と符合する*34．実験データを理論と比較して $h \sim 0.015$, $R_0 \sim 20$ Å と見積もられる．一様な過飽和混合液(^{3}He 濃度約 6%)中に半径 20 Å の安定相(^{3}He 濃度約 100%)が出現する際には，少なくとも半径 50 Å に及ぶ領域内の原子(10^4 個程度の原子)が関与するはずである．つまり，一様準安定状態と半径 R_0 の泡ができた状態は巨視的可峻別であり，この場合の猫性度は $\boldsymbol{D} \sim 10^4$ と見積もられる．かくて，実験で観察された二相分離現象は**巨視的量子核形成** (macroscopic quantum nucleation) によるものであり，これは MQT の一種である，との結論に達する*35．ちなみに，

$$\Gamma_{量\,\mathrm{nuc}}^{(m=3)} \Big/ \Gamma_{量\,\mathrm{nuc}}^{(m=0)} > 10^{20} \ : \ h < 0.1 . \qquad (3.2.34)$$

したがって，実験の解析に際して (3.2.32) 式の指数第 2 項の存在は決定的に重要である．

一般に，物質の状態が準安定状態から安定状態に移行する現象は一次相転移と呼ばれ，過冷却水蒸気中に水滴が発生する現象など身近に見られるものから，宇宙初期に “偽の真空 (false vacuum)” 中に “真の真空 (true vacuum)” が生じたとする理論的推測がなされた例に至るまで，非常に普遍的な現象と考えられ

---

*33 一次相転移を量子力学的に論じた Lifshitz と Kagan の先駆的論文(巻末文献[14])においては，指数第 2 項のない式が導出された．零点エネルギー (3.2.30) の効果が考慮されなかったからである．それゆえ修正という形容詞を付ける．

*34 厳密にいえば，Δx_{c} の値は実験の試行ごとに異なるはずであるが，そのばらつきは極めて小さいと予想される．以下に述べる数値的見積もりが正しければ，Δx が 2×10^{-3} 付近で 10 ppm($=10^{-5}$) 増えただけで $\Gamma_{量\,\mathrm{nuc}}$ は 1 桁も増加する．

*35 $\boldsymbol{D}$ の値は SQUID の場合に比べれば小さいが，少なくとも “準巨視的” の名には値するであろう．

ている．巨視的量子核形成はMQTの一種であって，Leggett構想に占めるその地位については第1章で触れたが，それを別としても，超低温域における一次相転移の引き金として普遍的に重要である．

量子核形成の検出を目指す実験は液体 ^{4}He を用いても行われている．液体 ^{4}He を減圧していくと，圧力が平衡圧力以下の過減圧状態となる．圧力がある値にまで減少したとき，一様な液体中に突然，空洞(ほとんど真空と言ってもいいほど稀薄な気泡)が発生すると期待される．この現象は**空洞形成** (cavitation) と呼ばれ，上述の理論に当てはめて解析されている．

本節で紹介した理論には種々の問題点がある．第一に模型自体の妥当性の問題である．Rayleigh-Plesset 模型は，やかんの湯の泡のような日常的尺度の泡に対しては適切かもしれないが，半径20Å程度の泡，さらには一様状態から発生しつつある $R\sim 0$ の泡にまで使えるという保証はない．第二に Lagrangian(3.2.24) を介して量子論 (2.1.9)–(2.1.10) に移行したことの妥当性である．q を通常の粒子の位置のごとくに扱ってよいものであろうか．また，それが仮によいとしても，(2.1.10) が (3.2.24) から一意的に導かれるわけではない．前者は，Hamiltonian の運動エネルギー項において，$\hat{R}$ とそれに共役な運動量 $\hat{P}$ に対し特定の**演算子順序** (operator ordering) を導入したことに相当する．なぜならば

$$-\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} \;\propto\; -\frac{\hbar^2}{2}\{M(R)\}^{-1/2}\frac{\partial}{\partial R}\{M(R)\}^{-1/2}\frac{\partial}{\partial R}\,. \tag{3.2.35}$$

演算子順序を変えることは，ポテンシャルに $\mathcal{O}(h^2)$ の補正項を加えることと同等である*36．第三に，$q=0$ で波動函数に課すべき境界条件は何か，これを決定すべき指導原理がない．以上，いずれも，より微視的な理論(例えば場の量子論)から出発して自由度を精密に仕分けしてみないことには答の出ない問題である．

3.2.4　核形成の場の理論

流体力学から得られた模型を使って量子力学に移行するのはいかにも気が引

*36　この補正は，本書で考察している最低次のWKB近似の結果には利かない．しかし，系がいかなる量子力学に従うかという基本的観点からすると，ないがしろにすべき問題ではない．

ける．そもそも核形成とは空間的に一様な準安定状態から泡が発生する現象であるから，場の理論的考察が必要であろう．流体力学も場の理論の一種(むしろ元祖)には違いないが，これは古典的な場の理論である．本来は場の量子論に基づいた議論が望まれる．本小節では，量子論的考察も可能な場の理論から出発して，しかし古典的な範囲で，Rayleigh-Plesset 模型が導かれるかどうかを検討する．

こわれた算盤を想い浮かべよう(図 3.7)．桁は $\boldsymbol{e}_y$ 方向を向いて間隔 a で整

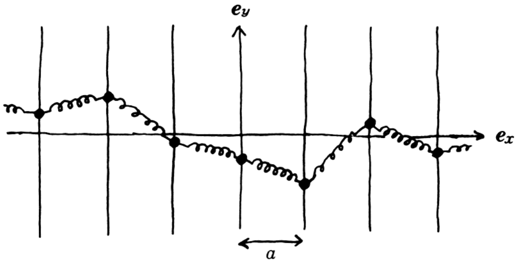


図 3.7 こわれ算盤の連珠

列しており，各桁に珠が 1 個だけ付いている．隣り合う珠はばねで結ばれている(ばね定数 $\kappa^{(a)}$)．第 l 番目の珠の $\boldsymbol{e}_y$ 軸沿いの位置を u_l とする．各珠は，その位置に応じてポテンシャルエネルギー $U^{(a)}(u_l)$ を感ずるものとする．珠の質量を $M^{(a)}_{珠}$ とすれば，この算盤珠集団の運動は次の Lagrangian $L^{(a)}_{珠}$ で記述される．

$$L^{(a)}_{珠} := \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{M^{(a)}_{珠}}{2} \dot{u}_l^2 - \frac{\kappa^{(a)}}{2} (u_l - u_{l-1})^2 - U^{(a)}(u_l) \right\} . \quad (3.2.36)$$

[作用]×[質量]$^{-1/2}$ の次元を持つ正定数 $\mathcal{K}$ を導入して

$$\phi_l := \sqrt{\kappa^{(a)} a}\ u_l / \mathcal{K} \quad (3.2.37)$$

とおけば

$$L^{(a)}_{珠} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a \left\{ \frac{\mathcal{K}^2}{2c^2} \dot{\phi}_l^2 - \frac{\mathcal{K}^2}{2} \left(\frac{\phi_l - \phi_{l-1}}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} U^{(a)}(\mathcal{K}\phi_l / \sqrt{\kappa^{(a)} a}) \right\} . \quad (3.2.38)$$

ただし

$$c \equiv \sqrt{\kappa^{(a)} a^2 / M^{(a)}_{\text{珠}}} \tag{3.2.39}$$

の次元は [速さ] である．ここで

$$\phi(la, t) = \phi_l(t) \tag{3.2.40}$$

なる実場*37 $\phi(x,t)$ を導入し，**連続体極限** (continuum limit: $a \downarrow 0$) を採ると，算盤珠集団は 1 本の紐になる*38.

$$\begin{aligned} L_{\text{紐}} &:= \lim_{a\downarrow 0} L^{(a)}_{\text{珠}} \\ &= \int dx \left[\frac{\mathcal{K}^2}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{c\, \partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right\} - \mathcal{U}(\phi(x,t)) \right] , \end{aligned} \tag{3.2.41}$$

$$\mathcal{U}(\phi) \equiv \lim_{a\downarrow 0} \frac{1}{a} U^{(a)}(\mathcal{K}\phi_l / \sqrt{\kappa^{(a)} a}) \ . \tag{3.2.42}$$

これを一般化すれば，次の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}$ で記述される**非線形 Klein-Gordon 場** (non-linear Klein-Gordon field) が得られる*39.

$$\mathcal{L} := \frac{\mathcal{K}^2}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{c\, \partial t} \right)^2 - (\nabla \phi)^2 \right\} - \mathcal{U}(\phi) \ , \tag{3.2.43}$$

ただし $\phi \equiv \phi(\boldsymbol{x}, t)$ は実スカラー場，$\boldsymbol{x}$ は d 次元空間の点，∇ は d 次元の勾配，c は速度の次元を持つ正定数である．もし**場ポテンシャル** (field potential) $\mathcal{U}$ が ϕ の 2 次式なら，この場は Klein-Gordon 場に他ならない．核形成の模型としてはわずかに傾いた二連井戸を採る（図 3.8）．これは図 2.2 と似ているが，横軸の変数が場であるという点において異なる．

結晶中の**転位** (dislocation) の運動は，この模型 (の $d=1$ の場合) によって議論することができる*40．転位はおおむね図 3.7 の $\boldsymbol{e}_x$ 方向に横たわった紐であり，その進行方向が $-\boldsymbol{e}_y$ である．直線状の紐 $\{\phi(x,t) = \phi_> \mid \forall x\}$ が一気に山を

---

*37　値が実数である場.

*38　$M^{(a)}_{\text{珠}}, \kappa^{(a)}, U^{(a)}(u)$ は，連続体極限 (3.2.41) が存在するような a 依存性を持つものとする.

*39　本小節後半部との繋がりを考え，ϕ の次元が $[\text{長さ}]^{-d/2}$ となるように定数 $\mathcal{K}$ を導入した．通常，この飾りは ϕ に吸収される：$\phi_{\text{通常}} = \mathcal{K}\phi$.

*40　ただし，結晶の周期性を反映して，場ポテンシャルは傾斜二連井戸の代わりに洗濯板となる.

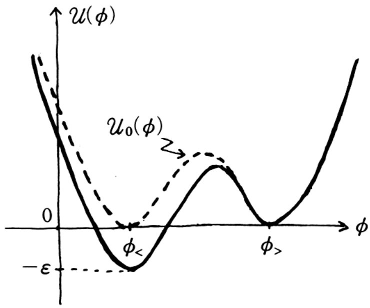


図 3.8　場ポテンシャル：傾斜二連井戸

越えて隣の直線 $\{\phi(x,t)=\phi_< \mid \forall x\}$ に移動することは不可能である．紐の一部分がまず山を越えて図 3.9 のような状況が生じ，その後，この部分が横に拡がっていくことにより転位が全体として山越えを果たす．転位の位置を記述する

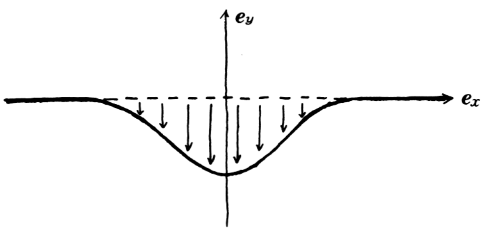


図 3.9　転位の進行（または核の形成）

場 ϕ を何か物質の相を表す場と見直せば（それに応じて $\boldsymbol{e}_y$ を相の空間における方向と見直せば），転位の進行は 1 次元空間における核形成と同じことになる．

ϕ は正負いずれの値をも採り得るから，例えば，一軸性異方性を持つ磁性体の格子点に並んだスピン（の異方軸成分）を連続体近似*41 したものとみなすこともできよう．あらかじめ磁化容易軸方向に磁場をかけてスピンを揃えておき，突然，磁場を反転すれば，すべてのスピンが磁場と逆方向に揃った準安定状態（$\{\phi(\boldsymbol{x},t)=\phi_> \mid \forall \boldsymbol{x}\}$）を作ることができる．そうしてしばし待つと，局所的にス

*41　空間位置のみならずスピン密度についても連続体極限を採る．

ピンが磁場方向に向きを変えた $\phi(\boldsymbol{x},t)=\phi_<$ なる領域が生ずるであろう*42．この領域は原点を中心とする球であるとし，これを泡と呼ぶ．ただし，界面(泡表面)は幾何学的球面ではなく，それには横顔(profile) がある．つまり，$\phi(\boldsymbol{x},t)$ は $r\,(\equiv|\boldsymbol{x}|)$ が増すにつれて $\phi_<$ から $\phi_>$ へと連続的に増加する．$\phi(\boldsymbol{x},t)=(\phi_<+\phi_>)/2$ となる球面の半径を泡半径 $R(t)$ と定義する*43．泡が充分に大きくて横顔がくっきりしている場合，界面は局所的には平面で近似できよう．場ポテンシャルの傾き ε が小さければ，横顔は，対称二連井戸 $\mathcal{U}_0$ における**場のポテンシャルエネルギー**

$$\int d^d\boldsymbol{x}\left\{\frac{\mathcal{K}^2}{2}(\nabla\phi)^2+\mathcal{U}_0(\phi)\right\} \tag{3.2.44}$$

を極小とする形になるであろう．場のポテンシャルエネルギーには場ポテンシャルだけでなく勾配項も含まれることに注意されたい．$\mathcal{U}_0$ を図 3.8 に破線で示す．その極小点は $\mathcal{U}$ と共通に採ってある．

したがって，原点を中心とする半径 $R(t)$ の泡が 1 個出現した状況を表す場は

$$\phi(\boldsymbol{x},t)\simeq b(r-R(t))\ , \tag{3.2.45}$$

ただし $b(x)$ は次式の解である．

$$\mathcal{K}^2b''(x)=\mathcal{U}_0'(b(x))\ ,\quad b(-\infty)=\phi_<\ ,\quad b(\infty)=\phi_>\ . \tag{3.2.46}$$

b と $\mathcal{U}_0$ に付けた $'$ はそれぞれ x 微分と ϕ 微分を表す．

$$b'(x)\equiv\frac{db(x)}{dx}\ ,\quad \mathcal{U}_0'(\phi)\equiv\frac{d\mathcal{U}_0(\phi)}{d\phi}\ . \tag{3.2.47}$$

$b(x)$ の概形を図 3.10 に示す．一般に，場のこのような形を**折曲***44(kink) と呼ぶ．折れ曲がり部分の幅を w とする．

以下，(3.2.45) を仮定して，場に付随する無限個の自由度を一挙に $R(t)$ だけに減らしてしまおう．$R(t)$ を支配する有効 Lagrangian を L とすれば

$$L=\int d^d\boldsymbol{x}\ \mathcal{L}\,\Big|_{\phi=b(r-R(t))}=L_{\rm K}+L_{\rm S}+L_{\rm B}\ , \tag{3.2.48}$$

---

*42　真空の相転移を論ずる場合なら，ϕ は“真空の相”を記述する場であり，$\phi_>$ と $\phi_<$ がそれぞれ**偽の真空**と**真の真空**に相当する．

*43　泡半径の定義は一義的ではない．

*44　おれまがり

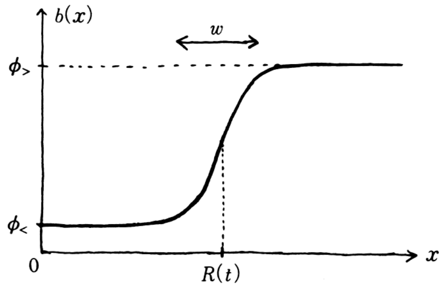


図 3.10　界面(泡表面)の横顔

$$L_K \equiv \int d^d\boldsymbol{x} \frac{\mathcal{K}^2}{2c^2}\{\partial b(r-R(t))/\partial t\}^2$$
$$\simeq \frac{1}{2}\mu_b\{R(t)\}^{d-1}\{\dot{R}(t)\}^2, \tag{3.2.49}$$

$$\mu_b \equiv \frac{\mathcal{K}^2}{c^2}\mathcal{S}_{d-1}\int_{-\infty}^{\infty} dx\{b'(x)\}^2 , \tag{3.2.50}$$

$$L_S \equiv -\int d^d\boldsymbol{x}\left\{\frac{\mathcal{K}^2}{2}\{\nabla b(r-R(t))\}^2+\mathcal{U}_0(b(r-R(t)))\right\}$$
$$\simeq -\mathcal{S}_{d-1}\{R(t)\}^{d-1}\sigma_b , \tag{3.2.51}$$

$$\sigma_b \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\left\{\frac{\mathcal{K}^2}{2}\{b'(x)\}^2+\mathcal{U}_0(b(x))\right\} , \tag{3.2.52}$$

$$L_B \equiv -\int d^d\boldsymbol{x}\{\mathcal{U}(b(r-R(t)))-\mathcal{U}_0(b(r-R(t)))\} = \mathcal{B}_d\{R(t)\}^d\varepsilon_b , \tag{3.2.53}$$

$$\varepsilon_b \equiv -\frac{1}{\mathcal{B}_d\{R(t)\}^d}\int_{r<R(t)} d^d\boldsymbol{x}\{\mathcal{U}(b(r-R(t)))-\mathcal{U}_0(b(r-R(t)))\}$$
$$\simeq \varepsilon , \tag{3.2.54}$$

ただし，ε は場ポテンシャルの傾き具合である(図 3.8)．近似等号 $\simeq$ は，$R(t) \gg w$ の場合に使える<u>**薄膜近似**</u> (thin-wall approximation) のもとで妥当な等式を表す．なお，定義 (3.2.46) より

$$\frac{\mathcal{K}^2}{2}\{b'(x)\}^2 = \mathcal{U}_0(b(x)) . \tag{3.2.55}$$

したがって

$$\sigma_{\mathrm{b}}=c^2\mu_{\mathrm{b}}/\mathcal{S}_{d-1}=\mathcal{K}^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\{b'(x)\}^2=\mathcal{K}\int_{\phi_<}^{\phi_>}d\phi\sqrt{2\mathcal{U}_0(\phi)}\ . \qquad (3.2.56)$$

こうして得られた L_{K}, L_{S}, L_{B} は Lagrangian (3.2.5) の運動エネルギー，界面エネルギー，体積エネルギーに対応している．そして，質量指数 m は $d-1$ に等しいことが分かった．

流体中の泡を記述する $m=d$ の Rayleigh-Plesset 模型は，非線形 Klein-Gordon 場からは導かれなかった．その理由は上の計算により明らかであろう．この場には流体の質量保存則に相当する保存則がなく，泡の有効質量に寄与するのが界面付近の場に限られるからである．そこで，次の Lagrangian 密度で記述される**一般化された非線形 Schrödinger 場** (generalized non-linear Schrödinger field)*45を考える．

$$\mathcal{L}:=\frac{i\mathcal{A}}{2}\frac{\partial\psi}{\partial t}\psi^*+\text{c.c.}-\frac{\mathcal{A}^2}{2m_{\mathrm{A}}}|\nabla\psi|^2-\mathcal{U}(|\psi|)\ . \qquad (3.2.57)$$

$\psi\equiv\psi(\boldsymbol{x},t)$ は複素スカラー場，$\mathcal{U}$ は (3.2.43) におけるものと同じ傾斜二連井戸，$\mathcal{A}$ と m_{A} はそれぞれ [作用] と [質量] の次元を持つ正定数である*46．Lagrangian 密度 (3.2.57) から得られる作用汎函数を $I[\psi]$ とする．

$$I[\psi]:=\int dt\int d^d\boldsymbol{x}\mathcal{L}\ . \qquad (3.2.58)$$

ψ を極形式で（つまり振幅と位相に分けて）書こう．

$$\psi(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t)\exp\{i\theta(\boldsymbol{x},t)\}\ . \qquad (3.2.59)$$

$\phi\,(\geqq 0)$ と θ は実場である．これを (3.2.57) に代入すると

$$\mathcal{L}=-\mathcal{A}\phi^2\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{m_{\mathrm{A}}}{2}\phi^2\boldsymbol{v}^2-\frac{\mathcal{A}^2}{2m_{\mathrm{A}}}(\nabla\phi)^2-\mathcal{U}(\phi)\ , \qquad (3.2.60)$$

ただし

---

*45　Non-linear Schrödinger field という言葉は $\mathcal{U}(|\psi|)=|\psi|^4$ の場合の固有名詞として使われることがあるので，これと区別すべく，一般化されたと断る．この Lagrangian をいきなり出すのは唐突かもしれない．後述の式 (3.2.85) の下に付けた脚注を参照．

*46　対応する自由場（上記 Lagrangian 密度にて $\mathcal{U}=0$ と置いた場）の量子論を調べると m_{A} は場に付随する粒子の質量となる．この場が液体 ^{4}He を記述するものとみなせば，場に付随する粒子とは ^{4}He 原子に他ならない（原子 (atom) のつもりで添字 A を付けた）．

$$\boldsymbol{v} := (\mathcal{A}/m_{\mathrm{A}})\nabla\theta \tag{3.2.61}$$

の次元は [速度] である．場の位相 $\theta(\boldsymbol{x},t)$ が "速度ポテンシャル" の役目をするわけである．

まず，θ に関して作用の停留点を探そう．系は容器に入っているとし，容器の壁における速度場の法線成分は 0 とすれば

$$0 = \frac{m_{\mathrm{A}}}{\mathcal{A}}\frac{\delta}{\delta\theta}I[\psi] = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\ , \tag{3.2.62}$$

$$\rho := m_{\mathrm{A}}\phi^2\ . \tag{3.2.63}$$

この式はまさしく流体の質量保存則の形をしている．それゆえ，(3.2.63) で定義される $\rho(\boldsymbol{x},t)$ を流体の質量密度と解釈する．これを用いて $I[\psi]$ から θ を消去した結果を $\tilde{I}[\phi]$ と書けば，

$$\tilde{I}[\phi] = \int dt \int d^d\boldsymbol{x}\,\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{A}\int d^d\boldsymbol{x}[\phi^2\theta]_{t=-\infty}^{t=\infty}\ , \tag{3.2.64}$$

$$\tilde{\mathcal{L}} := \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2 - \frac{\mathcal{A}^2}{2m_{\mathrm{A}}}(\nabla\phi)^2 - \mathcal{U}(\phi)\ . \tag{3.2.65}$$

この形になると馴染みやすいであろう．もちろん，$\boldsymbol{v}$ は (3.2.62) に従って ρ の汎函数である．ゆえに $\tilde{I}[\phi]$ は ϕ のみの汎函数である．簡単のため，式 (3.2.64) の右辺第 2 項を無視する[*47]．

以上の議論においては，まだ泡は登場していない．ここで，原点を中心とした球形の泡が 1 個存在する状況を想定しよう．速度場 $\boldsymbol{v}$ が泡の中心 $r=0$ にて正則でなければならないことを考慮して式 (3.2.62) を $\boldsymbol{v}$ について解くと

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^{d-1}\rho(r)}\int_0^r dr' r'^{d-1}\frac{\partial\rho(r')}{\partial t}\ , \tag{3.2.66}$$

$$\boldsymbol{e}_r \equiv \boldsymbol{x}/r\ , \quad \rho(r) \equiv \rho(r\boldsymbol{e}_r, t)\ . \tag{3.2.67}$$

したがって，Lagrangian の運動エネルギー部分 $\tilde{L}_{\mathrm{K}}$ は ϕ の非局所的汎函数である．

$$\tilde{L}_{\mathrm{K}} := \int d^d\boldsymbol{x}\,\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2$$

---

*47 量子論においては，この項は状態の位相に利き，必ずしも無視できるとは限らない．

$$= \frac{1}{2}\int d^d\boldsymbol{x}'\int d^d\boldsymbol{x}''\,\frac{\partial\rho(r')}{\partial t}\mathcal{M}(r',r'')\frac{\partial\rho(r'')}{\partial t}\ , \qquad (3.2.68)$$

$$\mathcal{M}(r',r'') \equiv \frac{1}{\mathcal{S}_{d-1}}\int_{\max(r',r'')}^{\infty}\frac{dr}{r^{d-1}\rho(r)}\ . \qquad (3.2.69)$$

$\mathcal{M}(r',r'')$ が非局所性を表す*48.

非線形 Klein-Gordon 場の場合と同様にして自由度の個数を 1 個に落とす. つまり, (3.2.46) にて $\mathcal{K}^2$ を $\mathcal{A}^2/m_{\rm A}$ で置き換えた式で定義される $b(x)$ を用いて (3.2.45) を仮定すれば

$$\partial\rho(r)/\partial t \simeq -\dot{R}(t)\ \partial\rho(r)/\partial r\ . \qquad (3.2.70)$$

ゆえに, 式 (3.2.66) より

$$\boldsymbol{v} \simeq \boldsymbol{e}_r\left(1-\frac{\rho(0)}{\rho(r)}\right)\left(\frac{R(t)}{r}\right)^{d-1}\dot{R}(t)\ . \qquad (3.2.71)$$

(3.2.45), (3.2.71) を (3.2.65) に代入して

$$\tilde{I}[\phi] \simeq \int dt(L_{\rm K}+L_{\rm S}+L_{\rm B})\ , \qquad (3.2.72)$$

ただし

$$L_{\rm K} \equiv \int d^d\boldsymbol{x}\,\frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2\Big|_{\phi=b(r-R(t))} \simeq \frac{1}{2}\mu_{\rm b}\{R(t)\}^d\{\dot{R}(t)\}^2\ , \qquad (3.2.73)$$

$$\mu_{\rm b} \equiv \mathcal{S}_{d-1}\int_0^{\infty}\frac{dy}{y^{d-1}}\rho(R(t)y)\left\{1-\frac{\rho(0)}{\rho(R(t)y)}\right\}^2$$

$$\simeq \frac{\mathcal{S}_{d-1}}{d-2}\rho_>\left(1-\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^2\ , \qquad (3.2.74)$$

$$\rho_\alpha \equiv m_{\rm A}\phi_\alpha^2\ :\ \alpha \text{ は } > \text{ または } <\ . \qquad (3.2.75)$$

$L_{\rm S}$ と $L_{\rm B}$ は非線形 Klein-Gordon 場の場合と同じである(ただし, $\mathcal{K}$ を $\mathcal{A}/\sqrt{m_{\rm A}}$ で置き換える). かくて, 一般化された非線形 Schrödinger 場から, 薄膜近似のもとで $m=d$ の Rayleigh-Plesset 模型が導かれた.

---

*48　もしこれが $\delta(r-r')$ に比例するならば, 上の Lagrangian は "局所的" である.

現実の液体 He は，Lennard-Jones 型の二体ポテンシャル*49で相互作用し合う原子の集団であり，これを直接に扱うことは並大抵の業ではできない．幸い，量子核形成の可能性が検討されるような低エネルギー現象においては，原子は正面衝突を回避しつつ動くと考えられ，そのような状況は，Lagrangian 密度 (3.2.57) で与えられるような**低エネルギー有効理論** (low-energy effective theory) で記述されるものと期待される．作用汎函数 $I[\psi]$ から最小作用の原理によって場の運動方程式を導き，これを $|\psi(\boldsymbol{x},t)|=\phi_>$ の回りで線形化すれば，準安定状態における場の微小揺らぎの基準振動が求められる．波数 $\boldsymbol{k}$ の基準振動の周波数を ω_k とすると*50

$$\omega_k = c_0 k\{1+(\lambda_0 k)^2\}^{1/2} \ , \tag{3.2.76}$$

$$c_0 \equiv \{\mathcal{U}''(\phi_>)/4m_{\rm A}\}^{1/2} \ , \quad \lambda_0 \equiv \frac{\mathcal{A}}{2m_{\rm A}c_0} \ . \tag{3.2.77}$$

これは長波長領域（$k^{-1} \gg \lambda_0$）にて k に比例する．対応する基準振動は質量密度 ρ と位相 θ の連動した振動である．したがって，場ポテンシャルの曲率で決まる定数 c_0 は準安定状態における音速と解釈することができる．λ_0 はこれに対応した<u>Compton 波長</u>であって，系を特徴付ける基本的長さである．それゆえ，折曲の壁幅 w もこの程度の量となる．

$$w \sim \lambda_0 \ . \tag{3.2.78}$$

場ポテンシャル $\mathcal{U}$ が図 3.8 に示されるようなおとなしい函数であれば，その中央部の極大値は $\phi_0^2\mathcal{U}''(\phi_>)$ の程度（ただし $\phi_0 \equiv \phi_> - \phi_<$）である．したがって式 (3.2.56) より

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm b} &= \frac{\overline{\sigma}}{2}\frac{\mathcal{A}}{\sqrt{m_{\rm A}}}\ \phi_0\{\phi_0^2\,\mathcal{U}''(\phi_>)\}^{1/2} \\ &= \overline{\sigma}\ \frac{\mathcal{A}\rho_0 c_0}{m_{\rm A}} \ , \quad \rho_0 \equiv 4m_{\rm A}\phi_0^2 \ ,\end{aligned} \tag{3.2.79}$$

---

*49 距離 r だけ離れた He 原子対の相互作用ポテンシャルエネルギーは，およそ $(a/r)^{12}-(a/r)^6$ に比例する．a がほぼ原子半径である．$r<a$ の領域に切り立ったポテンシャル壁を<u>堅（かたい）芯</u>(hard core) と呼ぶ．つまり，$r \gtrsim a$ の領域で弱い van der Waals 引力が働くことを除けば，He 原子は半径 a の剛体球 (hard sphere) と考えてよい．

*50 基準振動を量子論的に扱えば，$\hbar\omega_k$ は **Bogoliubov 準粒子** (Bogoliubov quasiparticle) の励起エネルギーとなる．

ただし $\bar{\sigma}$ は1の程度の数因子．つまり，σ_{b} のおよその値は，エネルギー密度 $\rho_0 c_0^2$ に Compton 波長 λ_0 を掛けたものと見積もられる．このようにして，Lagrangian 密度 (3.2.57) に現れる諸定数を現実の流体の物性と関連付けることができる．ただし，場を本節に述べたような手法で扱えるのは ψ が Bose 場の場合に限られる．液体 ^{4}He は Bose 場で記述されると考えられる．これに対し，^{3}He–^{4}He 混合液の場合には，Fermi 場で記述されると考えられる ^{3}He の自由度をあらかじめ消去するという手続きが必要となる．

量子核形成を論ずるには，以上に述べたことをすべて場の理論の段階から量子力学的に実行しなければならない．非線形 Klein-Gordon 場の場合ならば，ϕ に共役な運動量

$$\Pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} = \frac{\mathcal{K}^2}{c^2}\partial\phi/\partial t \tag{3.2.80}$$

を用いて場の Hamiltonian

$$\begin{aligned} H &:= \int d^d\boldsymbol{x}\{\Pi\partial\phi/\partial t - \mathcal{L}\}\Big|_{\partial\phi/\partial t = c^2\Pi/\mathcal{K}^2} \\ &= \int d^d\boldsymbol{x}\left\{\frac{c^2}{2\mathcal{K}^2}(\Pi(\boldsymbol{x}))^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi(\boldsymbol{x}))^2 + \mathcal{U}_0(\phi(\boldsymbol{x}))\right\} \end{aligned} \tag{3.2.81}$$

を作り，$\phi(\boldsymbol{x})$ と $\Pi(\boldsymbol{x})$ を正準交換関係

$$[\hat{\phi}(\boldsymbol{x}),\ \hat{\Pi}(\boldsymbol{x}')] = i\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{3.2.82}$$

に従う**場の演算子**(field operator) $\hat{\phi}(\boldsymbol{x})$, $\hat{\Pi}(\boldsymbol{x})$ で置き換えて話を進めねばならない．一方，一般化された非線形 Schrödinger 場の場合には，ψ に共役な運動量が

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\psi/\partial t)} = i\mathcal{A}\psi^* \tag{3.2.83}$$

と求められる．それゆえ，場の Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H &:= \int d^d\boldsymbol{x}\{i\mathcal{A}\psi^*\partial\psi/\partial t - \mathcal{L}\} \\ &= \int d^d\boldsymbol{x}\left\{\frac{\mathcal{A}^2}{2m_{\mathrm{A}}}\nabla\psi^*(\boldsymbol{x})\nabla\psi(\boldsymbol{x}) + \mathcal{U}(|\psi(\boldsymbol{x})|)\right\} \end{aligned} \tag{3.2.84}$$

となり，$\psi(\boldsymbol{x})$ と $\psi^*(\boldsymbol{x})$ を正準交換関係

$$[\hat{\hat{\psi}}(\boldsymbol{x}),\ \hat{\hat{\psi}}^\dagger(\boldsymbol{x}')] = \frac{\hbar}{\mathcal{A}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad (3.2.85)$$

に従う場の演算子 $\hat{\hat{\psi}}(\boldsymbol{x})$, $\hat{\hat{\psi}}^\dagger(\boldsymbol{x})$ で置き換えることになる．通常はさらに $\hat{\psi}(\boldsymbol{x}) := (\mathcal{A}/\hbar)^{1/2}\hat{\hat{\psi}}(\boldsymbol{x})$ と置いて上式を次のように書き換える*51.

$$[\hat{\psi}(\boldsymbol{x}),\ \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{x}')] = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'). \qquad (3.2.86)$$

量子核形成の場の量子論は未だ完成していない．非線形 Klein-Gordon 場について本格的な理論が構築されはじめたところである．

3.3 単磁区磁石

通常の磁石(強磁性体)は多数の磁区に分かれているが，大きさを微小にすることにより，単一の磁区から成る磁石を作ることができる．図 3.11 に示した

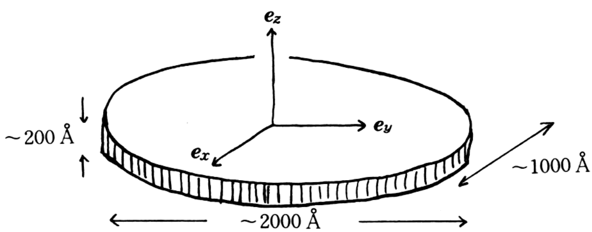


図 3.11 単磁区磁石の典型例

のは，実際に作成された Ni 磁石の寸法である．磁区内では微視的なスピンの方向がすべて揃っており，例えば磁場中での歳差運動もすべての微視的スピンが歩調を揃えて行うと考えてよい．したがって，個々の微視的スピンの運動を，全スピン(すべての微視的スピンの和)の運動で代表させることができる．これは，多数の原子からなる剛体球の並進運動を，その重心位置の運動で代表させることができるのと似た事情である．

---

*51 弁別不可能な Bose 粒子系の量子力学を，Fock 空間を導入して書き直せば，上記の形式 (3.2.84), (3.2.86) が得られる．むしろ，これが馴染みの形かもしれない．これにより Heisenberg 描像の演算子 $\hat{\psi}(\boldsymbol{x},t)$ を定義することができ，それの従う Heisenberg 運動方程式を導くことができる．形式的にこれと同一の運動方程式を与える Lagrangian を探せば，それが (3.2.57) である．

単磁区磁石のスピンの運動を記述する Hamiltonian $H(\hat{\boldsymbol{S}})$ として，典型的に次の模型が考えられる．すなわち，大きさ S のスピン演算子*52 $\hat{\boldsymbol{S}}$ を用いて

$$H(\hat{\boldsymbol{S}}) := \frac{K_{\|}}{S^2}\hat{S}_z^2 - \frac{K_{\perp}}{S^2}\hat{S}_y^2 - \frac{\mathcal{B}'}{S}\hat{S}_x - \frac{\mathcal{B}}{S}\hat{S}_y \,. \qquad (3.3.1)$$

ただし，$K_{\|}, K_{\perp}$ は異方性に由来するエネルギーを表す正定数*53，また $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ は外部磁場*54である．当該の磁石が N 個の微視的スピンから成り，各微視的スピンの大きさが s であれば，

$$S = Ns \,. \qquad (3.3.2)$$

図 3.11 の例では $S \sim 10^6$ となる．

長さ S の古典的ヴェクトル $\boldsymbol{S}$ を導入し，それを方位角 (θ, ϕ)*55で表してみよう．

$$S_z = S\cos\theta\,, \quad S_x = S\sin\theta\cos\phi\,, \quad S_y = S\sin\theta\sin\phi\,. \quad (3.3.3)$$

角度 ϕ の変域は

$$-\pi \leqq \phi \leqq \pi \qquad (3.3.4)$$

とし，$\phi = -\pi$ と $\phi = \pi$ を同一視する．(3.3.1) にて $\hat{\boldsymbol{S}}$ を古典的ヴェクトル $\boldsymbol{S}$ で置き換えて得られるエネルギー $H(\boldsymbol{S})$ は，例えば $\mathcal{B}' = 0$ の場合，$\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{e}_y$ で最小値をとり，$\boldsymbol{S} = -S\boldsymbol{e}_y$ で極小値をとる．したがって，例えば "スピンが $-\boldsymbol{e}_y$ 方向から $+\boldsymbol{e}_y$ 方向に連続的に向きを変えようとすると，途中で，$\pm\boldsymbol{e}_y$ いずれの方向よりもエネルギーの高い方向を経由しなければならない，つまり**スピンのトンネル現象**が起こる可能性がある" と言いたくなる．しかし，この議論は正当であろうか．そもそも通常の粒子のトンネル現象とは，粒子が運動エネルギーよりも高いポテンシャル障壁を通過することであった．Hamiltonian(3.3.1) が，前節の SQUID の場合のように，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和の形に書けて初めてトンネルを云々することができる．ところが，上の

---

*52　無次元．スピン演算子の表記法については付録 D 参照．

*53　それぞれ縦異方性エネルギー (longitudinal anisotropy energy)，横異方性エネルギー (transverse anisotropy energy) と呼ばれる．異方性の起源は種々考えられるが，磁石の形状自体がその主たるものである．微視的スピンの向きが揃うことによって反磁場が生じ，その方向が磁石の形状に応じて決まるからである．

*54　最後の 2 項は Zeeman エネルギー．スピンに付随する磁気能率は $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ に吸収．

*55　(θ, ϕ) の正式名は (天頂角, 方位角) らしいが，両者を区別するのも面倒なので，まとめて方位角と呼ぶ．

議論にいうエネルギーは全エネルギーであって，これは保存されるべき量である．これでは勘違いもはなはだしいように見える．果たして，スピンに対しても運動エネルギーとポテンシャルエネルギーなる概念が成立し得るであろうか．スピンはこまのようなものであり，周知の通りこまの動きはいささか天の邪鬼である．問題は自明ではない．基本に立ち戻って考える必要がある．

3.3.1 素朴量子論

$\hat{\boldsymbol{S}}$ を形式的に式 (3.3.3) の形に書き，(θ,ϕ) を素朴に演算子と見立てて $(\hat{\theta},\hat{\phi})$ と書いてみよう．

$$\hat{S}_z = S\cos\hat{\theta}\ , \quad \hat{S}_+ = Se^{i\hat{\phi}}\sin\hat{\theta}\ . \tag{3.3.5}$$

これを交換関係

$$[\hat{S}_z, \hat{S}_+] = \hat{S}_+ \tag{3.3.6}$$

に代入すれば

$$[\cos\hat{\theta}, e^{i\hat{\phi}}] = S^{-1}e^{i\hat{\phi}}. \tag{3.3.7}$$

これが成立するためには，仮にϕ表現なるものが構成できたとして，

$$\cos\hat{\theta}\ の\ \phi\ 表現が\ \frac{S^{-1}}{i}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{3.3.8}$$

であればよい．これを認めると

$$[\hat{\phi}, \hbar\hat{S}_z] = i\hbar\ . \tag{3.3.9}$$

つまり $\hbar\hat{S}_z$ は $\hat{\phi}$ に共役な運動量ということになる．さらに次の仮定を導入しよう．

仮定 $\mathcal{A}0$: 任意の時刻においてスピンはほぼ $\boldsymbol{xy}$ 面内にある*56．

$$|\theta-\pi/2| \ll 1\ . \tag{3.3.10}$$

$H(\hat{\boldsymbol{S}})$ の ϕ 表現を H_S と書けば*57，仮定 $\mathcal{A}0$ のもとで

$$H_S \simeq -\frac{S^{-2}}{2(2K_\parallel)^{-1}}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + U_S(\phi)\ , \tag{3.3.11}$$

$$U_S(\phi) := K_\perp(\cos\phi)^2 - \mathcal{B}'\cos\phi - \mathcal{B}\sin\phi\ . \tag{3.3.12}$$

つまり，スピンの問題が，ポテンシャル $U_S(\phi)$ 中を動く粒子の問題に帰着され，

*56 すなわち，任意の時刻で (3.3.10) が成立するように，初期条件を設定することができる．

*57 後者に付した S は素朴の意．ポテンシャル $U_S(\phi)$ にて付加定数 $-K_\perp$ を省略．

その質量は縦異方性エネルギーに逆比例すること，そして Planck 定数の代役をするのが S^{-1} であることが分かった．むろん，$2K_{\parallel}/S^2$ を $S^{-2}/(2K_{\parallel})^{-1}$ と書くべき必然性はなく，これは単なる示唆的解釈に過ぎない．ここでも言葉を濫用して，$U_S(\phi)$ を素朴スピンポテンシャルと呼ぶ．図 3.12 と 3.13 に典型的な場合を示す．ただし

$$a \equiv K_{\perp}/K_{\parallel}\ , \quad b \equiv \mathcal{B}/2K_{\perp}\ , \quad b' \equiv \mathcal{B}'/2K_{\perp}\ . \qquad (3.3.13)$$

例えば $\mathcal{B}'=0$ として外部磁場 $\mathcal{B}$ を変えてみると，$b=1$ を境にして $U_S(\phi)$ の形

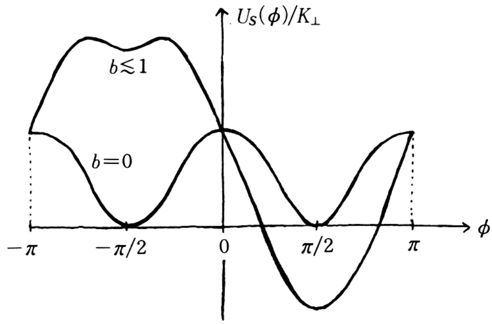


図 3.12　スピンポテンシャル($b'=0$ の場合)

が定性的に異なることが分かる．つまり $2K_{\perp}$ は一種の臨界磁場であって，$\mathcal{B}$ を調整することにより，以下のような典型的状況を用意することができる．

（イ）$b=0,\ b'=0$: 周期井戸 (MQC 状況)

（ロ）$b\lesssim1,\ b'=0$: 双たんこぶ坂 (MQT 状況)

これらスピンポテンシャルは SQUID における磁束ポテンシャルに似ている．しかし変数の性質が異なる．つまり，磁束が勝手な実数値を採り得るのに対し，スピンの方位角には制約 (3.3.4) がある．したがって，スピンを例えば $\phi\sim-\pi/2$ の状態に用意したとすれば，そこから左右いずれの方向にトンネルしても同一の状態 $\phi\sim\pi/2$ に行き着き得るから，両確率振幅が干渉するものと期待される．以下，MQC 状況について少し詳しく調べてみよう．

（イ′）MQC 状況 1 : $b=b'=0$

第 2.1 節に従って標準化し，量子性の目安を求めると

$$h = \frac{2}{\pi S}\sqrt{\frac{2}{a}} \ . \qquad (3.3.14)$$

したがって，$\sqrt{a}\,S \gg 1$ の場合に準古典的状況 (2.1.11) となることが分かる．(2.4.3) で定義される瞬子作用 I の値を計算すれば

$$\frac{1}{2}I = \sqrt{8}/\pi\,(= 0.9003\cdots \sim 1) \ . \qquad (3.3.15)$$

ゆえに基底エネルギー分裂は

$$\varDelta = 2\tilde{A}\exp(-2\sqrt{a}\,S) \ . \qquad (3.3.16)$$

右辺の $\tilde{A}$ は (2.4.2) で与えられる．冒頭の因子 $2\,(=1+1)$ が上述の干渉効果を表す．ただし，この結論は S が整数の場合にのみ正しく，半整数の場合には因子 2 を $0\,(=1-1)$ に変えなければならない（第 3.3.4 節）．h^{-1} は S（したがって磁石の大きさ）に比例し，図 3.11 の試料 $(a\sim 1)$ では $h^{-1}\sim 10^6$，これではMQC 検出は絶望である．しかし，すぐ下で述べる通り，x 方向にも磁場を掛けて $b' \lesssim 1$ と調節すれば h^{-1} を小さくすることができる．

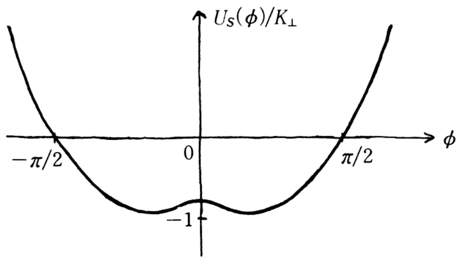


図 3.13　$b=0$, $b' \lesssim 1$ の場合の MQC 状況

（イ″）MQC 状況 2: $b=0$, $b' \lesssim 1$

角度領域 $\phi \sim 0$ に着目すれば

$$U_S(\phi)/K_\perp \simeq 1 - 2b' - (1-b')\phi^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{b'}{4}\right)\phi^4 \ . \qquad (3.3.17)$$

これはSQUID における MQC 状況（イ′）と同様であり，そこの γ の代わりが b' である．ゆえに

$$h \ \propto \ (1-b')^{-3/2} \ . \qquad (3.3.18)$$

瞬子作用 I の値は (2.4.15) の I^{SSDW} で与えられる．この場合には（イ′）のよう

な干渉効果は起こらない．

MQT 状況については，双方向にトンネルできるという違いはあるものの定性的には SQUID の場合と同じであり，b が臨界値 1 に近いほど h^{-1} は小さくなる．

$$h \propto (1-b)^{-3/2} \ . \tag{3.3.19}$$

素朴量子論の結論は，SQUID の場合と同じく，共鳴トンネルを含む MQT 実験によって支持されている．つまり，図 2.7 および図 2.8 に相当する結果がいずれも得られている．特に，後者の図の山に相当して，$\mathcal{B}$ を変えていくと $\mathcal{B}$ が特定の値になる度に磁化が急に増える*58 ことが観察され，それら特定値は素朴量子論から期待される値とよく合っている*59．ある種の磁性体*60 において MQC を検出したとの報告もある．しかし，この報告に対しては疑義も出されており，MQC 検出と断定するには時期尚早の感がある．

3.3.2　経度基底系と経度表現波動函数

本章ではいかにも素朴な(つまり大雑把な)量子論を展開してきたので，いささか気分の悪い読者も多かろう．罪滅ぼしとして，本節の単磁区磁石の場合について素朴量子論の基礎付けをしておく．まずは，そのための準備をする．

スピンの量子力学は周知の事項であるが，本小節の目的は，“スピンのトンネル現象”なるものが合理的に考えられるかどうかを検討し，もし考えられるものならば，それをできるだけ直観的に理解することである．そのために，スピンの量子力学を，粒子の波動力学にできるだけ近い形で定式化することを試みる．後者は粒子の位置演算子 $\hat{\boldsymbol{r}}$ の固有状態 $|\boldsymbol{r}\rangle$ を用いて，状態および演算子を位置表現することによって得られる．粒子位置 $\boldsymbol{r}$ の属する 3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{E}^3$ は**配位空間**(configuration space)である．

大きさ S のスピンを記述する Hilbert 空間 $\mathcal{H}_S$ の標準基底系

$$\{|m\rangle \,|\, m=-S,-S+1,\cdots,S \ : \ \hat{S}_z|m\rangle = m|m\rangle\} \tag{3.3.20}$$

＊58　磁化の履歴曲線 (hysteresis curve) が跳びを示す．

＊59　ただし，この実験の対象は図 3.11 ほど大きな磁石ではなく，$S=10$ の分子である．

＊60　反強磁性“鉄タンパク質”(ferritin)．90 年代初頭に馬の脾臓から取り出して実験されたが，最近は人工的に合成されている．これを扱うには，反強磁性であることを考慮して本節の理論を手直しする必要があるものの，S に相当する量は $\mathcal{O}(10^3)\sim\mathcal{O}(10^4)$ に達する．

は離散的であり，上述の目的にそぐわない．しばしば用いられる基底系として，いわゆる**スピン・コヒーレント状態** (spin coherent state) がある．$\boldsymbol{n}$ を実単位ヴェクトルとして，スピン・コヒーレント状態 $|\boldsymbol{n}\rangle$ とは次式で定義される状態のことである．

$$\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}|\boldsymbol{n}\rangle = S|\boldsymbol{n}\rangle\ ,\quad \langle\boldsymbol{n}|\boldsymbol{n}\rangle = 1\ . \tag{3.3.21}$$

いうまでもなく，$\boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ の最大固有値は S である．その最大固有値に対応する状態という意味で，

状態 $|\boldsymbol{n}\rangle$ においてはスピンが $\boldsymbol{n}$ 方向を向いている　(3.3.22)

と称する．$\{|\boldsymbol{n}\rangle|\,\boldsymbol{n}\in S^2\}$*61は基底系を成すので，これを用いた表現が可能である．しかし球面 S^2 は，スピンの配位空間ではなくて**相空間***62(phase space) である(付録D)．したがって，この表現は本節の目的にはそぐわない．ではスピンの配位空間は何か．素朴量子論から察するに，"$\boldsymbol{n}$ の x および y 成分が配位空間に属すのであろう，とすれば，$\boldsymbol{n}$ を xy 面内に限ればよいのではないか" という考えが浮かぶ．しかし，残念ながら $\{|\boldsymbol{n}\rangle|\,\boldsymbol{n}\in S^1\}$ は基底系をなさない．

素朴量子論が的外れでなければ，$|m\rangle$ は粒子の場合の運動量固有状態 $|\boldsymbol{p}\rangle$ に対応するはずである．後者と粒子位置の固有状態との関係は

$$|\boldsymbol{r}\rangle = \int \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\ e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}|\boldsymbol{p}\rangle\ . \tag{3.3.23}$$

これから示唆を得て

$$|\phi\rangle_s := \sum_m e^{-im\phi}|m\rangle\ ,\quad \sum_m \equiv \sum_{m=-S}^{S} \tag{3.3.24}$$

を導入しよう*63．すると

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\phi}{2\pi}\,|\phi\rangle_{ss}\langle\phi| = \sum_m |m\rangle\langle m| = 1\ . \tag{3.3.25}$$

つまり

$$\{|\phi\rangle_s\,|\,-\pi<\phi<\pi\} \tag{3.3.26}$$

*61　S^n は n 次元単位球面．

*62　"位相空間" と呼ばれることもあるが，topological space とまぎらわしい．

*63　この状態は，調和振動子(あるいは光子)の "位相演算子 (phase operator)" を論ずる際にも活用される．例えば D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer (1994), Sect. 2.8.

は**完全性** (closure) を持つ．これを**経度基底系**と呼ぶ．もちろん，$\mathcal{H}_S$ の次元は $2S+1$ であるから，この基底系は一次独立系でなく，直交性は成立しない．

$$ {}_s\langle\phi'|\phi\rangle_s = \sum_m e^{i(\phi'-\phi)m} = \frac{\sin\left\{\left(S+\dfrac{1}{2}\right)(\phi'-\phi)\right\}}{\sin\left\{\dfrac{1}{2}(\phi'-\phi)\right\}}. \tag{3.3.27} $$

したがって，(3.3.26) は過剰基底系(over-complete basis) の一種である．

完全性により，任意の $|\psi\rangle$ ($\in\mathcal{H}_S$) を経度基底系で展開することができる．

$$ |\psi\rangle = \left\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\phi}{2\pi}|\phi\rangle_{s\,s}\langle\phi|\right\}|\psi\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\phi}{2\pi}\psi_s(\phi)|\phi\rangle_s\,, \tag{3.3.28} $$

$$ \psi_s(\phi) := {}_s\langle\phi|\psi\rangle = \sum_m e^{im\phi}\langle m|\psi\rangle\,. \tag{3.3.29} $$

$|\psi\rangle$ が 1 に規格化されていれば，完全性の帰結として

$$ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\phi}{2\pi}|\psi_s(\phi)|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1\,. \tag{3.3.30} $$

$\psi_s(\phi)$ を，状態 $|\psi\rangle$ の**経度表現波動函数**と呼ぶ．$\phi\in(-\pi,\ \pi)$ であるから，これは円周上で定義された函数と見ることができる．ただし，ひとつ注意すべきことがある．定義 (3.3.24) により

$$ |\phi\rangle_s = e^{-i(\phi+\pi)\hat{S}_z}|-\pi\rangle_s\,. \tag{3.3.31} $$

したがって[*64]

$$ |\pi\rangle_s = e^{-2\pi i\hat{S}_z}|-\pi\rangle_s = e^{-2S\pi i}|-\pi\rangle_s\,, \tag{3.3.32} $$

$$ \psi_s(\pi) = e^{2S\pi i}\psi_s(-\pi)\,. \tag{3.3.33} $$

つまり，S が整数ならば ψ_s は円周上の連続函数であるが，S が半整数[*65]の場合には，円周を一周すると符号が変わる．Möbius 帯に似ているので条件 (3.3.33) をMöbius 境界条件と呼ぶ[*66]．$|\phi\rangle_s$ と ψ_s に付けた添字 s は，これを

---

*64　正確には，左辺の π は $\pi-0$，右辺の $-\pi$ は $-\pi+0$.

*65　$S\in\boldsymbol{N}_{1/2}$，すなわち正奇数の 1/2．正確に言えば半正奇数であろうが，ふつう半整数と呼ばれる．

*66　S が整数なら**周期境界条件** (periodic boundary condition) である．

忘れないようにするための目印である*67.

なお，経度基底系は $S\uparrow\infty$ の極限において形式的に直交系を成す.

$$\lim_{S\uparrow\infty} {}_s\langle\phi'|\phi\rangle_s = 2\pi\delta(\phi'-\phi). \qquad (3.3.34)$$

経度表現波動函数の性質を理解すべく，スピン・コヒーレント状態 $|\boldsymbol{n}\rangle$ を表す波動函数を調べてみよう．以下 $\boldsymbol{n}$ が xy 面内にある場合，つまり

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_x \cos\phi_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{e}_y \sin\phi_{\boldsymbol{n}} \qquad (3.3.35)$$

を考えれば，付録 D の式 (D.4.9) にて $\theta_{\boldsymbol{n}} = \pi/2$ と置いて*68

$$|\boldsymbol{n}\rangle = 2^{-S}\exp(-i\phi_{\boldsymbol{n}}\hat{S}_3)\exp(\hat{S}_-)|S\rangle\,, \qquad (3.3.36)$$

$${}_s\langle\phi|\boldsymbol{n}\rangle = \sum_m b_{Sm}^{1/2}\, e^{im\varphi}\ , \quad \varphi \equiv \phi - \phi_{\boldsymbol{n}}\ , \qquad (3.3.37)$$

ただし

$$b_{Sm} := |\langle m|\boldsymbol{n}\rangle|^2 = \frac{(2S)!}{(S-m)!(S+m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2S} \qquad (3.3.38)$$

は(規格化された) 2 項係数である．特に $S \gg 1$ の場合,

$$\mu \equiv m/S \qquad (3.3.39)$$

と置けば

$$b_{Sm} \simeq (\pi S)^{-1/2}\exp(-S\mu^2)\,. \qquad (3.3.40)$$

つまり，$|\boldsymbol{n}\rangle$ を標準基底系 (3.3.20) で展開すると，$|m| \lesssim S^{1/2}$ $(\mu \lesssim S^{-1/2})$ に確率が集中している (図 3.14)．したがって

$$\begin{aligned}{}_s\langle\phi|\boldsymbol{n}\rangle &\simeq (\pi S)^{-1/4} S \sum_m \frac{1}{S}\exp\left\{-\frac{S}{2}\left(\frac{m}{S}\right)^2 + iS\frac{m}{S}\varphi\right\} \\ &\simeq (\pi S)^{-1/4} S\int_{-1}^{1} d\mu \exp\left(-\frac{S}{2}\mu^2 + iS\mu\varphi\right) \\ &\simeq (\pi S)^{-1/4} S^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + iS^{1/2}\varphi x\right)\end{aligned}$$

---

*67 定義式 (3.3.24) 右辺の位相因子 $\exp(-im\phi)$ を，S が半整数の場合には $\exp(-i(m+1/2)\phi)$ で置き換えれば，$|\phi\rangle_s$ は周期的になる．この置き換えは後述の変換 (3.3.79) と等価である．このように手直しされた $|\phi\rangle_s$ は“周期的コヒーレント状態 (periodic coherent state)” と呼ばれることがある (大貫義郎・鈴木増雄・柏太郎: 経路積分の方法, 岩波書店 (1992), 第 3–4 節.).

*68 右辺全体にかかる位相因子 $\exp(i\phi_{\boldsymbol{n}}S)$ を略.

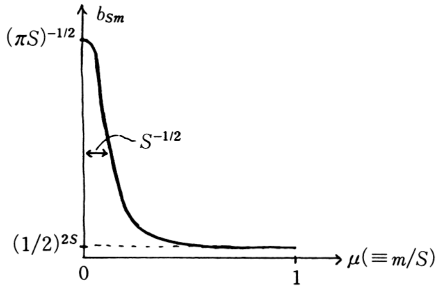


図 3.14 $S \gg 1$ の場合の 2 項係数

$$= (4\pi S)^{1/4} \exp\left\{-\frac{S}{2}(\phi-\phi_{\boldsymbol{n}})^2\right\}. \qquad (3.3.41)$$

この波動函数は，$\phi=\phi_{\boldsymbol{n}}$ を中心として幅 $S^{-1/2}$ の範囲に鋭く集中しており，(3.3.22) という描像を定量的に裏書きしている．逆にいえば，そのような描像は $S\uparrow\infty$ の極限でのみ厳密に成立し，一般の $S\,(\gg 1)$ に対しては $\mathcal{O}(S^{-1/2})$ の量子揺らぎを考慮しなければならないことが分かる (図 3.15)．かくて経度表現

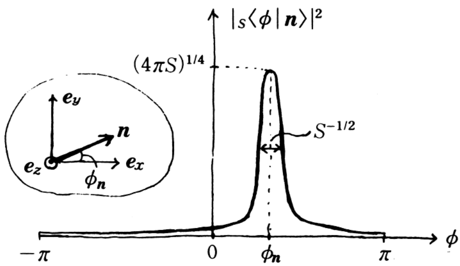


図 3.15 スピン・コヒーレント状態の経度表現波動函数

は，スピンに対する古典的描像に沿った直観的な表現であるといえよう．もちろん，上述の量子揺らぎはスピンの標準的量子力学において周知の事実であり，これを示すだけなら経度表現波動函数などを持ち出す必要はない．$\boldsymbol{n}$ 軸の回りの回転対称性と $\hat{\boldsymbol{S}}^2=S(S+1)$ を使えば，$\boldsymbol{n}$ と直交する任意の単位ヴェクトル $\boldsymbol{l}$ に対してただちに次式を導くことができる．

$$\langle \boldsymbol{n}|(\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{S}})^2|\boldsymbol{n}\rangle = \frac{1}{2}\{S(S+1)-S^2\} = \frac{1}{2}S\,. \qquad (3.3.42)$$

これを古典的な言葉で言い表せば，スピンは平均として $\boldsymbol{n}$ 方向を向いているものの，$\boldsymbol{n}$ を中心軸とする頂角 $S^{-1/2}$ 程度の円錐内で揺らめいている，ということになる．

$\psi_s(\phi)$ は規格化条件 (3.3.30) を満たすけれども，過剰基底系による表現の常として，その確率解釈には若干の注意がいる．$\phi' \neq \phi$ であっても $|\phi'\rangle_s$ と $|\phi\rangle_s$ が直交しないから，ϕ' に見出されるという事象と ϕ に見出されるという事象は排反でない．通常の粒子の量子学において

$$\int d\boldsymbol{r}|\psi(\boldsymbol{r})|^2 = 1 \qquad (3.3.43)$$

から "$|\psi(\boldsymbol{r})|^2$ は粒子が $\boldsymbol{r}$ に見出される確率密度である" と結論する際には，$\boldsymbol{r}'$ に見出されるという事象と $\boldsymbol{r}$ に見出されるという事象の排反性 ($\boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{r}$ ならば $\langle \boldsymbol{r}'|\boldsymbol{r}\rangle = 0$) を前提としていることを想起されたい．しかし，$|\phi'-\phi| > S^{-1/2}$ ならば近似的に排反性が成り立つ．ゆえに，$S \gg 1$ の場合には，$\psi_s(\phi)$ に対して通常の確率解釈をほぼそのまま適用することができる．

3.3.3　スピン演算子の経度表現

Schrödinger 方程式を ϕ に関する微分方程式の形に表したい．そのためには Hamiltonian の**経度表現**がいる．まず $\hat{S}_z$ について考えよう．任意の状態 $|\psi\rangle$ に対し

$$\begin{aligned} {}_s\langle \phi|\hat{S}_z|\psi\rangle &= \sum_m e^{im\phi}\langle m|\hat{S}_z|\psi\rangle \\ &= \sum_m e^{im\phi} m\langle m|\psi\rangle = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}\psi_s(\phi)\,. \end{aligned} \qquad (3.3.44)$$

(この式変形には (3.3.24) と (3.3.29) を用いた.) ゆえに $-i\partial/\partial\phi$ を $\hat{S}_z$ の経度表現と呼ぶ．次に

$$\hat{S}_+|m\rangle = \mathcal{S}(m)|m+1\rangle\,, \qquad (3.3.45)$$

$$\mathcal{S}(m) := \{S(S+1)-m(m+1)\}^{1/2} \qquad (3.3.46)$$

を用いて

$$
\begin{aligned}
{}_s\langle\phi|\hat{S}_-|\psi\rangle &= \sum_m e^{im\phi}\langle m|\hat{S}_-|\psi\rangle \\
&= \sum_m e^{im\phi}\mathcal{S}(m)\langle m+1|\psi\rangle \\
&= e^{-i\phi}\sum_m e^{im\phi}\mathcal{S}(m-1)\langle m|\psi\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{3.3.47}
$$

m の変域は $-S$ から S までに限られているけれども，上の式変形は次式に注意すれば問題がない．

$$
\mathcal{S}(S)=\mathcal{S}(-S-1)=0\,. \tag{3.3.48}
$$

同様にして

$$
{}_s\langle\phi|\hat{S}_+|\psi\rangle = e^{i\phi}\sum_m e^{im\phi}\mathcal{S}(m)\langle m|\psi\rangle\,. \tag{3.3.49}
$$

以下，$|\psi\rangle$ が次の性質を持つと仮定する．

仮定 $\mathcal{A}1$: $|\psi\rangle$ はスピンがほぼ xy 面内にある状態である．すなわち

$$
|\langle m|\psi\rangle|^2\sim 0\ :\ |m|\gtrsim S^{1/2}\,. \tag{3.3.50}
$$

このような状態の典型例が，xy 面内の $\boldsymbol{n}$ に対する $|\boldsymbol{n}\rangle$ である ((3.3.40) 参照)．仮定 $\mathcal{A}1$ は仮定 $\mathcal{A}0$ を正式に述べたものである．すると，(3.3.49) に寄与するのは $|m|\lesssim S^{1/2}$ の範囲の m だけであるから，実効的に

$$
\mathcal{S}(m)\simeq S+\frac{1}{2}-\frac{1}{2S}\left(m+\frac{1}{2}\right)^2, \tag{3.3.51}
$$

ただし近似等号 $\simeq$ は，$\mathcal{O}(S^{-1/2})$ までを残し $\mathcal{O}(S^{-1})$ を無視したことを示す．ゆえに

$$
\begin{aligned}
{}_s\langle\phi|\hat{S}_+|\psi\rangle &\simeq e^{i\phi}\left\{S+\frac{1}{2}-\frac{1}{2S}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{2}\right)^2\right\}\psi_s(\phi) \\
&=\left\{\left(S+\frac{1}{2}\right)e^{i\phi}-\frac{1}{2S}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2}\right)e^{i\phi}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{2}\right)\right\}\psi_s(\phi)\,.
\end{aligned}
\tag{3.3.52}
$$

右辺の微分演算子が<u>$\hat{S}_+$ の経度表現</u>である．同様に (3.3.47) より

$$
{}_s\langle\phi|\hat{S}_-|\psi\rangle \simeq e^{-i\phi}\left\{S+\frac{1}{2}-\frac{1}{2S}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\psi_s(\phi)
$$

$$=\left\{\left(S+\frac{1}{2}\right)e^{-i\phi}-\frac{1}{2S}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{1}{2}\right)e^{-i\phi}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{1}{2}\right)\right\}\psi_s(\phi)\,. \tag{3.3.53}$$

当然のことながら，右辺の微分演算子は (3.3.52) に現れたものの Hermite 共役になっている．以上の議論から明らかな通り，形式的に

$$\frac{1}{iS}\frac{\partial}{\partial\phi}=\mathcal{O}(S^{-1/2})\,. \tag{3.3.54}$$

もちろんこれは，条件 (3.3.50) を満たす状態の波動函数に作用する，という前提に立って左辺の演算子の効果を見積もったものである．

以下，さらに堕落して $\mathcal{O}(S^{-1/2})$ をも無視し，そうして得られる等式を ≈ で表せば

$${}_s\langle\phi|\frac{1}{S}\hat{S}_\pm|\psi\rangle\approx\left\{\left(1+\frac{1}{2S}\right)e^{\pm i\phi}+\frac{1}{2}\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial\phi}e^{\pm i\phi}\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\psi_s(\phi)\,, \tag{3.3.55}$$

$$\begin{aligned}{}_s\langle\phi|\frac{1}{S}\hat{S}_y|\psi\rangle&=\frac{1}{2iS}\left\{{}_s\langle\phi|\hat{S}_+|\psi\rangle-{}_s\langle\phi|\hat{S}_-|\psi\rangle\right\}\\&\approx\left\{\left(1+\frac{1}{2S}\right)\sin\phi+\frac{1}{2}\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial\phi}\sin\phi\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\psi_s(\phi)\,.\end{aligned} \tag{3.3.56}$$

かくて，$\mathcal{O}(S^{-1})$ までの精度で <u>$\hat{S}_y/S$ の経度表現</u>が得られた．したがって，同じ精度で

$${}_s\langle\phi|\frac{1}{S^2}\hat{S}_y^2|\psi\rangle\approx\left\{\left(1+\frac{1}{S}\right)(\sin\phi)^2+\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi)^2\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\psi_s(\phi)\,. \tag{3.3.57}$$

以上をまとめて <u>$H(\hat{\boldsymbol{S}})$ の経度表現</u> H_S を得る．

$${}_s\langle\phi|H(\hat{\boldsymbol{S}})|\psi\rangle=H_S\psi_s(\phi),$$

$$H_S\approx-\frac{1}{2}\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{M(\phi)}\frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial\phi}+\tilde{U}(\phi)\,, \tag{3.3.58}$$

$$M(\phi):=\frac{1}{2K_\parallel}\{1+a(\sin\phi)^2+ab'\cos\phi+ab\sin\phi\}^{-1}\,, \tag{3.3.59}$$

$$\tilde{U}(\phi) := K_{\perp}\left\{\left(1+\frac{1}{S}\right)(\cos\phi)^2 - \left(1+\frac{1}{2S}\right)2b'\cos\phi - \left(1+\frac{1}{2S}\right)2b\sin\phi\right\}. \tag{3.3.60}$$

ただし a, b', b は (3.3.13) で定義される正定数である．質量とおぼしき $M(\phi)$ が ϕ に依存することに注意しておこう*69．この事情は前節の核形成現象の場合と似ている．かくて，Hamiltonian(3.3.1) で記述されるスピンの時間発展は，近似的に次の Schrödinger 方程式によって与えられる．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_s(\phi,t) \approx H_S\psi_s(\phi,t)\ . \tag{3.3.61}$$

ただし ψ_s は境界条件 (3.3.33) を満たさねばならない．

核形成の議論において R/R_0 の代わりに q を変数に採ったのと同じ精神で，$M(\phi)$ の ϕ 依存性を処理すべく，次式によって変数を ϕ から φ に変換する．

$$\varphi = -\pi + \gamma\int_{-\pi}^{\phi} d\phi'\{M(\phi')\}^{1/2} =: \Phi^{-1}(\phi)\ , \tag{3.3.62}$$

$$\gamma^{-1} \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\{M(\phi)\}^{1/2}. \tag{3.3.63}$$

φ は ϕ の単調増加函数であり，その変域は後者と同じく $(-\pi,\ \pi)$ である．両者の関係を与える函数を Φ と書いた．これを用いて以下の量を定義する．

$$\mu(\varphi) := \{M(\Phi(\varphi))\}^{1/4}, \tag{3.3.64}$$

$$\Psi_s(\varphi,t) := \{\mu(\varphi)\}^{-1}\gamma^{-1/2}\psi_s(\Phi(\varphi),t)\,, \tag{3.3.65}$$

$$U(\varphi) := \tilde{U}(\Phi(\varphi)). \tag{3.3.66}$$

すると (3.3.61) は次の形に書かれる．

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_s(\varphi,t) &\approx \left\{-\frac{\gamma^2}{2S^2}\mu(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\{\mu(\varphi)\}^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mu(\varphi) + U(\varphi)\right\}\Psi_s(\varphi,t) \\ &\approx \left\{-\frac{\gamma^2}{2S^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + U(\varphi)\right\}\Psi_s(\varphi,t). \end{aligned} \tag{3.3.67}$$

右辺第 1 行と第 2 行の差は $\mathcal{O}(S^{-2})$ であるから，$\mathcal{O}(S^{-1})$ までの精度の近似に

*69　むろん，$M(\phi)$ の次元は $[\text{エネルギー}]^{-1}$．

おいては無視してよい．また

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} |\Psi_s(\varphi, t)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} |\psi_s(\phi, t)|^2 = 1, \tag{3.3.68}$$

$$\Psi_s(\pi, t) = e^{2S\pi i} \Psi_s(-\pi, t). \tag{3.3.69}$$

特に，縦異方性の強い状況

$$a \ll 1\ , \quad ab' = \mathcal{B}'/2K_{\parallel} \ll 1, \quad ab = \mathcal{B}/2K_{\parallel} \ll 1 \tag{3.3.70}$$

においては

$$\gamma^2 \simeq 2K_{\parallel}\ , \quad \Phi(\varphi) \sim \varphi\ , \quad U(\varphi) \simeq \tilde{U}(\varphi)\ . \tag{3.3.71}$$

この場合，(3.3.67) は素朴量子論においてポテンシャルの係数 $K_\perp, \mathcal{B}', \mathcal{B}$ に $\mathcal{O}(1/S)$ の補正を加えたものになっている．現実の微小磁石 (例えば $S \sim 10^4$) などでは $1/S$ は完全に無視できるから，素朴量子論の結果が正当化されたわけである．ただし，そうはいっても，

$$\hat{\phi}|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle\ , \quad \langle\phi'|\phi\rangle = 2\pi\delta(\phi' - \phi) \tag{3.3.72}$$

を満たす $|\phi\rangle$ および "Hermite な経度演算子 $\hat{\phi}$" が存在するわけではなく，(3.3.61) はあくまで経度表現として理解されねばならない．その重要な帰結の一つが日付変更点 $\varphi = \pm\pi$ における Möbius 境界条件 (3.3.69) である．

上に得られた結果 (3.3.67) の応用例として，縦異方性が必ずしも強くない場合の MQC 状況について考えてみよう．$b = b' = 0$ とし，第 2.1 節に従って標準化すれば

$$h = \left\{ \frac{2}{S(S+1)} \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{a^{-1} + (\sin\phi)^2}} \right\}^{-1}\ . \tag{3.3.73}$$

特に $a \gg 1$ の場合，上の積分に最も寄与するのは $\phi \sim 0$ であるから，h は $(\log a)^{-1}$ に比例することが分かる．もう少し丁寧に計算すると

$$h \simeq \left\{ \frac{8}{S(S+1)} \right\}^{1/2} \frac{1}{\log 16a}\ :\ a \gg 1\ . \tag{3.3.74}$$

また，この場合には $I \simeq \sqrt{8} \log 4a / \log 16a$．したがって基底エネルギー分裂は

$$\Delta \simeq \{1 + (-1)^{2S}\} \tilde{A} \left(\frac{1}{4a} \right)^{\sqrt{S(S+1)}}\ . \tag{3.3.75}$$

右辺に(e を底とする)指数函数があからさまには現れないことは，一見意外かもしれないが，h が $(\log a)^{-1}$ に比例することの結果に過ぎない．

なお，トンネル状況においては，運動エネルギーは井戸内の零点エネルギーの程度であるから

$$h^2 \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \sim h\omega_0 \ . \tag{3.3.76}$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} \sim h^{-1/2} \sim S^{1/2} \ . \tag{3.3.77}$$

かくて仮定 $\mathcal{A}1$ すなわち (3.3.54) が正当化される．

式 (3.3.75) 冒頭の因子 $\{1+(-1)^{2S}\}$ は，a の大きさによらず現れ，Möbius 境界条件に由来する干渉効果を表す．この効果は，Aharonov-Bohm 効果からの類推によっても理解され得る．すなわち，

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi A_s(\varphi) = 2S\pi \ , \quad A_s(\varphi) \in \boldsymbol{R} \tag{3.3.78}$$

を満たす勝手な周期函数 $A_s(\varphi)$ を導入して

$$\Psi(\varphi,t) := \Psi_s(\varphi,t) \exp\left\{ i \int_{-\pi}^{\varphi} d\varphi' A_s(\varphi') \right\} \tag{3.3.79}$$

と変換すれば，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\varphi,t) \approx \left[\frac{\gamma^2}{2S^2} \left\{ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi} - A_s(\varphi) \right\}^2 + U(\varphi) \right] \Psi(\varphi,t) \ , \tag{3.3.80}$$

$$\Psi(\pi,t) = \Psi(-\pi,t) \ . \tag{3.3.81}$$

これは，磁束 $2S\pi$ によって貫かれた環沿いに運動する荷電粒子の Schrödinger 方程式と同じ形である．$A_s(\varphi)$ は条件 (3.3.78) を満たす限り勝手な函数であって，磁束 $2S\pi$ を表すヴェクトルポテンシャルということになる[*70]．

3.3.4　対称性と干渉効果

本節で導入した近似とは独立に（したがって S の大きさにかかわらず）成立する性質をまとめておこう．以下に述べるのはいずれも Hamiltonian の対称性から直接に結論される事柄である．

---

*70　実際に方程式を解く際には，(3.3.69) の下で (3.3.67) を解く方がやさしい．

（i）**時間反転対称性**:

S が半整数の場合，式 (3.3.75) 冒頭の因子により $\Delta=0$，つまり基底エネルギー分裂が現れない．これは $H(\hat{\boldsymbol{S}})$ の基底状態が縮退していることを意味し，**Kramers 縮退** (Kramers degeneracy) の一例である．すなわち，$b=b'=0$ の場合における Hamiltonian(3.3.1) の時間反転対称性

$$H(-\hat{\boldsymbol{S}})=H(\hat{\boldsymbol{S}}) \tag{3.3.82}$$

の帰結である．

（ii）π **回転対称性**:

$\hat{S}_y$ の固有状態を $|m;\boldsymbol{e}_y\rangle$ と書こう．

$$\hat{S}_y\,|m;\boldsymbol{e}_y\rangle=m\,|m;\boldsymbol{e}_y\rangle\ . \tag{3.3.83}$$

これをスピン・コヒーレント状態の定義 (3.3.21) と比べて

$$|\pm S;\boldsymbol{e}_y\rangle=|\pm\boldsymbol{e}_y\rangle\ . \tag{3.3.84}$$

y 軸回りの π 回転演算子を $\hat{R}\,(\equiv\exp(-i\pi\hat{S}_y))$ とすれば，

$$\hat{R}\,|m;\boldsymbol{e}_y\rangle=e^{-im\pi}\,|m;\boldsymbol{e}_y\rangle\ . \tag{3.3.85}$$

$\hat{R}$ はユニタリー演算子であるから，勝手な多項式 $f(H)$ に対し

$$f(\hat{H})=\hat{R}^{\dagger}f(\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{\dagger})\hat{R}\ . \tag{3.3.86}$$

ゆえに

$$\mathcal{A}_{m'm}\equiv\langle m';\boldsymbol{e}_y|f(\hat{H})|m;\boldsymbol{e}_y\rangle \tag{3.3.87}$$

$$=\langle m';\boldsymbol{e}_y|\hat{R}^{\dagger}f(\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{\dagger})\hat{R}|m;\boldsymbol{e}_y\rangle$$

$$=e^{i(m'-m)\pi}\langle m';\boldsymbol{e}_y|f(\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{\dagger})|m;\boldsymbol{e}_y\rangle\ . \tag{3.3.88}$$

$\mathcal{A}_{m'm}$ が二通りに表されたから，その相加平均を採れば

$$\mathcal{A}_{m'm}=\frac{1}{2}\left\{\langle m';\boldsymbol{e}_y|f(\hat{H})|m;\boldsymbol{e}_y\rangle+e^{i(m'-m)\pi}\langle m';\boldsymbol{e}_y|f(\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{\dagger})|m;\boldsymbol{e}_y\rangle\right\}\ . \tag{3.3.89}$$

相加平均を採ったのは，すぐ後で行う議論（経路積分法との比較）に都合がよいからである．ここで

$$f(H)=\exp(-iHt/\hbar) \tag{3.3.90}$$

と置けば，$\mathcal{A}_{m'm}$ は状態 $|m;\boldsymbol{e}_y\rangle$ から $|m';\boldsymbol{e}_y\rangle$ への遷移振幅を表す．式 (3.3.89) の各項は，それぞれ，$\hat{H}$ および $\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{\dagger}$（つまり $\hat{H}$ を y 軸に関して折り返した

もの)による時間発展を表す．$\mathcal{A}_{m'm}$ をこれら二通りの時間発展の平均と見ることができるわけである．ただし，第 2 項に位相因子 $e^{i(m'-m)\pi}$ が掛かっている点に要注意．以上は $\hat{H}$ が何であっても成り立つ．さて $b'=0$ の場合，b の値にかかわらず，式 (3.3.1) の Hamiltonian $\hat{H} \equiv H(\hat{\boldsymbol{S}})$ は y 軸回りの π 回転に対して不変である．

$$\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{\dagger} = \hat{H} \ . \tag{3.3.91}$$

したがって

$$\mathcal{A}_{m'm} \propto 1 + e^{i(m'-m)\pi} \ . \tag{3.3.92}$$

ゆえに次の定理を得る．

$$m' - m \text{ が奇数ならば } \mathcal{A}_{m'm} = 0 \, . \tag{3.3.93}$$

この定理の結果として，S が半整数の場合，$|-S; \boldsymbol{e}_y\rangle$ から $|S; \boldsymbol{e}_y\rangle$ への遷移は禁止される．

$$\langle \boldsymbol{e}_y | \exp(-i\hat{H}t/\hbar) | -\boldsymbol{e}_y \rangle = 0 \ : \ S \in \boldsymbol{N}_{1/2} \ , \ \forall t \ . \tag{3.3.94}$$

スピンのトンネル現象は往々にして経路積分の言葉で語られる．この言葉を使って上の結果を述べれば次のようになる．

> $|-\boldsymbol{e}_y\rangle$ から $|\boldsymbol{e}_y\rangle$ への遷移振幅は，$\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{e}_y$ と $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_y$ を結ぶ無限個の経路*71に付随する振幅*72の和と見なすことができる．式 (3.3.89) の第 1 項を経路に分解し，勝手な一つの経路(例えば図 3.16 の実線)に着目すれば，それを y 軸に関して折り返した経路(同図破線)が第 2 項の分解に現れる．対称性 (3.3.91) により，両経路は遷移振幅に同等の寄与をする．ただし両者の位相は $2S\pi$ だけずれている．それゆえ，S が半整数の場合には，無限個の経路からの寄与が，対ごとに打ち消し合う．

なお，式 (3.3.94) は $|\pm\boldsymbol{e}_y\rangle$ を $|\pm\pi/2\rangle_s$ で置き換えても成り立つ．

$${}_s\langle \pi/2 | f(\hat{H}) | -\pi/2 \rangle_s \propto 1 + e^{2iS\pi} \ . \tag{3.3.95}$$

ただし，(3.3.94) または (3.3.95) から“S が半整数かつ $b'=0$ の場合，スピ

---

*71　いわゆるスピン・コヒーレント状態経路積分の場合なら，スピンの相空間 S^2 上の経路．一般に経路積分においては無限個の経路が総て同等に扱われる(**Feynman 民主主義**)．例えば R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill (1965) [北原一夫訳: ファインマン経路積分と量子力学, マグロウヒル出版 (1990)]．この民主主義に則って議論すべく，(3.3.89) を相加平均の形にしておいた．

*72　経路積分の意味における振幅．スピンの経路積分については例えば，大貫・鈴木・柏: 前掲．

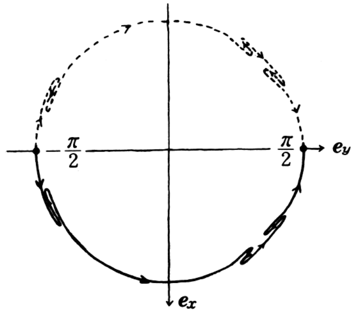


図 3.16 スピン経路積分に現れる典型的な経路

ンはトンネルしない" と結論するのは速断に過ぎる．(3.3.94) の遷移が禁止されるからといって，すぐ隣りへの遷移振幅

$$\langle S-1; \boldsymbol{e}_y| \exp(-i\hat{H}t/\hbar)| -S; \boldsymbol{e}_y\rangle \qquad (3.3.96)$$

が 0 である理由はない．$S \gg 1$ の場合，状態 $|S, \boldsymbol{e}_y\rangle$ と $|S-1, \boldsymbol{e}_y\rangle$ を実験的に区別することは難しく，いずれに遷移しても "スピンが $-y$ 方向から y 方向に向き直った" と記録されるであろう．S が整数の場合には，(3.3.94) の遷移振幅が 0 でない代わりに，(3.3.96) が 0 となる．したがって，MQT は，$2S$ の偶奇に応じて劇的に変わる現象ではない．

演習問題

3.1 図 3.1 程度の大きさの SQUID の場合，諸定数の一例(巻末文献[10])は

$$\mathcal{C} = 80\,\mathrm{fF}\ , \quad \mathcal{R} = 5\,\mathrm{k}\Omega\ , \quad \mathcal{L} = 210\,\mathrm{pH}\ , \quad I_c = 0.78\,\mu\mathrm{A}\ . \qquad (3.3.97)$$

この場合に I_{Φ_0}, γ の大きさを見積もれ．

3.2 標準化された磁束ポテンシャル $V(q)$ の極小点における振動数 ω_0 を計算せよ．

3.3 問 3.1 で与えた定数を用い，図 3.3 の場合について，$U_0, \tau_0, \omega_0, h_0, h, \eta$ の大きさを見積もれ．同じく図 3.4 の場合についても考えよ．

3.4 式 (3.2.35) 右辺の微分演算子は，Hermite でないように見えるかもしれないが，積分測度 $\{M(R)\}^{1/2}dR\,(\propto dq)$ に関して Hermite であることを示せ(式 (3.3.64) 以降の議論も参照)．

3.5　(1) [場], [長さ], [時間], [エネルギー密度] の単位として ϕ_0, λ_0, $\lambda_0/2c_0$, ρ_0 を採り, (3.2.58) の $I[\psi]$ を無次元化せよ.

(2) この単位で測った Planck 定数を g とすれば

$$g = 4\hbar m_{\mathrm{A}} c_0^2/\mathcal{A}\rho_0\lambda_0^d \,. \tag{3.3.98}$$

(3) 無次元化された場ポテンシャル $\mathcal{U}(\phi) := \mathcal{U}_ヮ(\phi)/\rho_0$ で, 図 3.8 の形を与える最も単純な函数は

$$\mathcal{U}(\phi) \;=\; \mathcal{U}^{\mathrm{STDW}}(\varphi) := \mathcal{U}^{\mathrm{SSDW}}(\varphi) - 4\varepsilon\varphi^3 + 3\varepsilon\varphi^4 \;, \tag{3.3.99}$$

$$\mathcal{U}^{\mathrm{SSDW}}(\varphi) \;:=\; \frac{1}{2}\varphi^2(1-\varphi)^2 \;, \quad \varphi \equiv (\phi_> - \phi)/\phi_0 \;. \tag{3.3.100}$$

この場合の折曲 $b(x)$ と式 (3.2.79) の $\overline{\sigma}$ を求めよ.

3.6　微小磁石において, トンネル効果によってスピンの方向が変化し得るといったが, これは角運動量保存則と矛盾しないか. SQUID の場合も同様.

3.7　b と b' を変化させるとスピンポテンシャル $U_S(\phi)/K_\perp$ はどのように変わるか. 図示せよ.

3.8　波動函数が周期境界条件を満たすものとして, 素朴 WKB 法で (3.3.16) を導け. Möbius 境界条件(S が半整数)の場合には冒頭の因子 2 が 0 になることを示せ. また, $\tilde{A}$ の値を求めよ.

3.9　図 3.12 の双たんこぶ坂において, 準安定状態($\phi \sim -\pi/2$)の崩壊率公式((2.4.5) に相当する式)を素朴 WKB 法で導け.

3.10　$\{|\boldsymbol{n}\rangle \mid \boldsymbol{n} \in S^1\}$ は基底系をなさないことを示せ.

3.11　波動函数は複素数であるから複素平面上の点で表される. これを用いて, Möbius 境界条件を視覚的に図示せよ.

3.12　b_{Sm} を $S = 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots$ について図示し, (3.3.40) と比べよ.

3.13　波動函数 (3.3.37) を $S = 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots$ について図示せよ. 近似形 (3.3.41) は ϕ のどの領域で妥当か.

3.14　境界条件 (3.3.33) に注意しつつ, (3.3.44) の右辺の微分演算子が Hermite であること, また (3.3.52) と (3.3.53) の右辺の微分演算子が互いに Hermite 共役であることを証明せよ.

3.15　式 (3.3.67) の第 1 行と 2 行の微分演算子の差が次式に等しいことを示せ.

$$-\frac{\gamma^2}{2S^2}\{(\partial^2 \log\mu) - (\partial\log\mu)^2\} \;:\; \partial \equiv \frac{\partial}{\partial\varphi} \;, \quad \mu \equiv \mu(\varphi) \,. \tag{3.3.101}$$

3.16　種々の a, b, b' について $U(\varphi)$ を求め, $\tilde{U}(\varphi)$ と比べよ.

3.17　(3.3.72) を満たす $|\phi\rangle$, $\hat{\phi}$ は存在しないことを示せ.

3.18　(3.3.73) と (3.3.74) を示せ. 前者右辺の積分は母数 k の第一種完全楕円

積分 $K(k)$ を用いて $\sqrt{\dfrac{a}{1+a}}K\left(\sqrt{\dfrac{a}{1+a}}\right)$ と表されるが，後者を導く際に楕円積分についての知識は必要はない．

3.19　状態 $|\pm\pi/2\rangle_s$ は y 軸回りの π 回転 $\hat{R}$ によって変わらないが，その位相は変化する．

$$\hat{R}|\pm\pi/2\rangle_s = e^{\mp iS\pi}|\pm\pi/2\rangle_s \;. \qquad (3.3.102)$$

これを示し，(3.3.95) を証明せよ．

4 気楽な環境問題

量子力学的干渉効果は，環境の影響によってかき消されてしまうことがある．系が巨視的であるか否かにかかわらず起こり得ることであるが，巨視系の場合には“それが不可避かつ致命的である”というのが反 QIMDS の伝統的立場の趣旨であった．本章では干渉性の消失について基礎的な視点から概観し，その骨子の把握を目指す．

4.1 干渉性とその消失

コヒーレンス (coherence)*1という言葉は，頻繁に耳にするものの，いささか曖昧な使われ方をしていて分かりにくいかもしれない．例えば“コヒーレントな線形結合”といった語句に遭遇することがあるが，このコヒーレントは強調形容詞として文学的に用いられているに過ぎず，論理的には不要(むしろ余計)である．“インコヒーレント (incoherent) な線形結合”などというものは存在しない．いかなる量子力学的状態も，必ず何らかの線形結合とみなすことができ，適切な状況を設定すれば干渉効果を示し得る．この意味では，量子力学的状態はすべてコヒーレントである*2．通常は，特定の干渉効果に関心を持ち，その干渉効果が見られる場合をコヒーレント，それが見られない場合をインコヒーレントと称しているようである．つまり，状態だけを指定されて“その状態がコヒーレントか否か”と問われても答えようがない．状態と関心の両方を指定

*1 “可干渉性”．その形容詞がコヒーレント (coherent)．

*2 いわゆる**コヒーレント状態** (coherent state) は固有名詞であって，“コヒーレントな状態”という一般名詞ではない．

して初めて，この問いが意味をなす．最初に述べたことは，**混合** (mixture) についても当てはまる．“インコヒーレントな混合”なる語句におけるインコヒーレントも文学的強調形容詞であり，“コヒーレントな混合”なるものは存在しない．

さて，コヒーレンスに “in” とは別の否定詞を付けた言葉が**干渉性消失** (decoherence*3) である．干渉性消失の機構は**位相攪乱**(dephasing)と**散逸**(dissipation)に大別される．

$$\text{DDD}: \text{ Decoherence} = \text{Dephasing} \vee \text{Dissipation} . \tag{4.1.1}$$

一般に散逸とは，巨視系から環境へと準保存量が不可逆的に移行することをいう．準保存量というのは，巨視系が孤立していたとすれば保存され，かつ，環境との相互作用があっても緩やかにしか時間変化しない量のことである．高真空中に浮かべられた物体の運動量や角運動量もその例である．しかし通常はそのような理想的状況にはないので，散逸といえば，巨視系に集中していたエネルギーが環境に移行することを指す．一方，位相攪乱とは，巨視系の状態の位相が環境によって乱される(正確な意味は後述)ことをいい，これは通常，制御不能な乱れであるとされる．干渉性消失機構として，散逸は重要ではあるがその一部であって，位相攪乱の効果がそれに劣らず重要であることは古来より磁気緩和理論などにおいて認識されている．巨視的量子現象においても事情は同じである．

4.2 MQC における干渉性消失の一般論

MQC 状況 (図 2.1(イ)) を想定し，巨視系 Hamiltonian $\hat{H}_S$ の固有状態を，エネルギー固有値の小さい順に番号付ける．

$$\hat{H}_S|n\rangle = E_n|n\rangle , \quad E_0 < E_1 < E_2 < \cdots . \tag{4.2.1}$$

基底状態と第 1 励起状態のエネルギー差(基底エネルギー分裂)を第 2.2 節に従

*3　この言葉は自動詞としても使われる．例えば “States $|0\rangle$ and $|1\rangle$ decohere due to the effects of environment (線形結合の成分 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の間の干渉性が環境の影響によって失われる).” 非干渉性歴史(consistent histories, decohering histories, もしくは non-interfering histories)の理論においても decoherence という概念が登場する．これは 1980 年代に入ってから展開されているものであり，量子力学の枠組自体にとって重要な問題であるが，本書にいう干渉性消失とは文脈の異なる概念である．

って $h\Delta$ と書く．

$$\Delta := (E_1 - E_0)/h \ . \tag{4.2.2}$$

これら二状態の線形結合

$$|\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle) \tag{4.2.3}$$

は，それぞれ粒子が右または左井戸に局在した状態である．

巨視系の初期状態を $|-\rangle$ とする（式 (2.2.7)）．環境の影響によって，巨視系の時間発展が (2.2.10) と比べてどう変わるか，想像してみよう．環境の影響として考えられることを列挙すると

（1） 巨視系のエネルギー準位が環境から摂動を受けてずれるであろう．E_n のずれを δE_n とする．

（2） 初期状態に含まれる第 1 励起状態の成分は，ある寿命で基底状態に落ち，その分だけ基底状態の成分が増えるであろう．第 1 励起状態の寿命を T_1 とする*4．

（3） 位相攪乱が起こるであろう．$\hat{H}_\mathcal{S}$ の各固有状態 $|n\rangle$ に，制御不能な位相因子 $\exp\{-i\vartheta_n(t)\}$ が掛かるとする．

以上 3 点を考慮すれば，(2.2.10) の代わりに次のようになるものと予想される*5．

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sqrt{P_0(t)}\, e^{-i(E_0+\delta E_0)t/h - i\vartheta_0(t)}|0\rangle - \sqrt{P_1(t)}\, e^{-i(E_1+\delta E_1)t/h - i\vartheta_1(t)}|1\rangle \\ &\propto \sqrt{P_0(t)}\, e^{it\tilde{\Delta}/2 + i\vartheta(t)/2}|0\rangle - \sqrt{P_1(t)}\, e^{-it\tilde{\Delta}/2 - i\vartheta(t)/2}|1\rangle \ . \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

ただし

$$P_1(t) \simeq \frac{1}{2}e^{-t/T_1}, \quad P_0(t) \simeq \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{2} - P_1(t)\right\} = 1 - \frac{1}{2}e^{-t/T_1}, \tag{4.2.5}$$

$$\tilde{\Delta} \equiv \Delta + (\delta E_1 - \delta E_0)/h \ , \tag{4.2.6}$$

$$\vartheta(t) \equiv \vartheta_1(t) - \vartheta_0(t) \ . \tag{4.2.7}$$

この予想によれば，時刻 t に巨視系が状態 $|\pm\rangle$ に見出される確率 $\mathcal{P}_\pm(t)$ は

$$\mathcal{P}_\pm(t) = |\langle\pm|\psi(t)\rangle|^2$$

---

*4 T_1 の添字 1 は第 1 励起状態の 1 を表すものではない（本節末参照）．

*5 式 (4.2.4) の最後の比例係数は全体に掛かる位相因子であるから無視して構わない．

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{P_0(t)}\, e^{it\tilde{\Delta}/2 + i\vartheta(t)/2} \mp \sqrt{P_1(t)}\, e^{-it\tilde{\Delta}/2 - i\vartheta(t)/2} \right\} \right|^2$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ P_0(t) + P_1(t) \mp 2\sqrt{P_0(t)P_1(t)}\ \Re\left(e^{-i\vartheta(t)} e^{-it\tilde{\Delta}} \right) \right\}. \qquad (4.2.8)$$

つまり量子共鳴振動の位相は t に応じて $\vartheta(t)$ だけずれる．振幅 $\sqrt{P_0(t)P_1(t)}$ を短時間域 $(t_c \ll t \ll T_1)$[*6] と長時間域 $(t \gtrsim T_1)$ に分けて調べよう．前者においては $(t/T_1)^2$ を無視することができるから

$$\sqrt{P_0(t)} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{t}{2T_1}\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{t/2T_1}, \quad \sqrt{P_1(t)} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t/2T_1}, \qquad (4.2.9)$$

$$2\sqrt{P_0(t)P_1(t)} \simeq 1\ . \qquad (4.2.10)$$

ゆえに振幅は時間に依らず一定である．一方，長時間域においては $\mathcal{O}(e^{-3t/2T_1})$ を無視すれば

$$2\sqrt{P_0(t)P_1(t)} \simeq \sqrt{2}\, e^{-t/2T_1}\ . \qquad (4.2.11)$$

また，巨視系のエネルギーの期待値 $E_{\mathcal{S}}(t)$ は

$$E_{\mathcal{S}}(t) = E_0 P_0(t) + E_1 P_1(t) = E_0 + \frac{1}{2}(E_1 - E_0) e^{-t/T_1}\ . \qquad (4.2.12)$$

よって，“量子共鳴振動の減衰の特性時間はエネルギー散逸の特性時間 T_1 の 2 倍” ということになる．

制御不能位相 $\vartheta(t)$ の起源については，例えば環境が巨視系に対して乱雑な磁場 $\mathcal{B}(t)$ を及ぼすとして，以下のように理解できよう．環境の影響により，巨視系 Hamiltonian に

$$\hat{H}'_{\mathcal{S}} := h\mathcal{B}(t)\hat{S}_3 = \frac{1}{2} h\mathcal{B}(t)(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|) \qquad (4.2.13)$$

という項が付け加えられるとする[*7]．これは，各時刻 t において，第 1 励起状態と基底状態のエネルギー差を瞬間的に $h\mathcal{B}(t)$ だけ増やす効果を持つ．したが

*6　t_c は巨視系と環境の相互作用を特徴付ける微視的な特性時間(例えば次節の ω_c^{-1})．いずれにせよ，第 2.5 節で述べたことと同様，$P_1(t)$ が指数函数的に振る舞うのは量子 Zeno 時間域を経過した後である．

*7　$\hat{S}_3$ の定義は式 (2.2.4)．

って

$$\vartheta(t)=\int_0^t dt'\mathcal{B}(t')\ . \tag{4.2.14}$$

実験家には $\mathcal{B}(t)$ の t 依存性を知る術がないから，$\{\mathcal{B}(t)\}$ を**確率過程** (stochastic process) とみなし，無知を糊塗すべく平均操作を施すことになろう．簡単のため **Gauss 過程**であるとし，それに関する平均を上棒で表せば

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{B}(t)}=0\ ,\quad \overline{\mathcal{B}(t_3)\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)}=0\ ,\\
&\overline{\mathcal{B}(t_4)\mathcal{B}(t_3)\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)}=\overline{\mathcal{B}(t_4)\mathcal{B}(t_3)}\ \overline{\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)}\\
&\quad+\overline{\mathcal{B}(t_4)\mathcal{B}(t_2)}\ \overline{\mathcal{B}(t_3)\mathcal{B}(t_1)}+\overline{\mathcal{B}(t_4)\mathcal{B}(t_1)}\ \overline{\mathcal{B}(t_3)\mathcal{B}(t_2)}\ , \qquad (4.2.15)\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

つまり，奇数個の $\mathcal{B}(t)$ から成る積の平均はすべて 0 であり，偶数個の場合には可能なすべての対平均の積和に分解される．したがって

$$\overline{e^{-i\vartheta(t)}}=e^{-\frac{1}{2}\Theta(t)}\ , \tag{4.2.16}$$

$$\Theta(t)\equiv\int_0^t dt_2\int_0^t dt_1\overline{\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)}\ . \tag{4.2.17}$$

ゆえに

$$\overline{\mathcal{P}_\pm(t)}=\frac{1}{2}\Big\{P_0(t)+P_1(t)\mp 2\sqrt{P_0(t)P_1(t)}\,e^{-\frac{1}{2}\Theta(t)}\cos(t\tilde{\Delta})\Big\}. \tag{4.2.18}$$

さらに，$\{\mathcal{B}(t)\}$ が**定常過程** (stationary process: $\overline{\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)}$ が時間差 t_2-t_1 のみによる)とすれば，

$$\mathcal{B}_0^2\equiv\overline{\mathcal{B}(t)\mathcal{B}(t)}\ , \tag{4.2.19}$$

$$\tau_c\equiv\mathcal{B}_0^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}dt_2\overline{\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)} \tag{4.2.20}$$

を用いて[*8]

$$\Theta(t)\simeq\mathcal{B}_0^2\tau_c t\ :\ t\gg\tau_c\ . \tag{4.2.21}$$

ゆえに，位相攪乱効果は量子共鳴振動を減衰させる．

以上の議論はもっともらしくはあるものの，大いに不満が募る．環境環境といわれつつ，環境が直接に姿を見せていないからである．環境の挙動も，

---

*8 τ_c は雑音 $\overline{\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)}$ の相関時間 (correlation time) と呼ばれる．

暗々裡に言葉だけで済まされるのではなく，正式に量子力学で記述されるべきであろう．そこで，環境の Hamiltonian を $\hat{H}_{\mathcal{E}}$ *9，巨視系と環境の相互作用 Hamiltonian を $\hat{H}_{\mathcal{SE}}$，巨視系と環境を合わせた全系の Hamiltonian を $\hat{H}$ とする．

$$\hat{H} := \hat{H}_{\mathcal{S}} + \hat{H}_{\mathcal{E}} + \hat{H}_{\mathcal{SE}} \ . \tag{4.2.22}$$

時刻 t における全系の状態を $|\Psi(t)\rangle\rangle$ と書く*10．また，巨視系を記述する Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$，環境を記述する Hilbert 空間を $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ と書く．もちろん前者は基底系

$$\{|n\rangle \mid n = 0, 1, 2, \cdots\} \tag{4.2.23}$$

で張られる空間である．$|\Psi(t)\rangle\rangle$ は直積 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ に属する．

巨視系の初期状態を $|-\rangle$，環境の初期状態を $|\chi\rangle$ として，全系の時間発展を考えよう．

$$ih\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle\rangle \ , \tag{4.2.24}$$

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |-, \chi\rangle\rangle \equiv |-\rangle|\chi\rangle \ . \tag{4.2.25}$$

これの形式解は

$$|\Psi(t)\rangle\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle\rangle \ , \quad \hat{U}(t) := \exp(-i\hat{H}t/h) \ . \tag{4.2.26}$$

これを $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ の基底系 (4.2.23) で展開することができる．展開係数は $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ に属する状態であり，一般に t に依存する．

$$|\Psi(t)\rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t/h}|n\rangle\widetilde{|\chi_n(t)\rangle} \ : \ \widetilde{|\chi_n(t)\rangle} \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}} \ . \tag{4.2.27}$$

つまり，巨視系と環境が相互作用することによって，一般に $|\Psi(t)\rangle\rangle$ は纏状態となり，(4.2.25) のような積では書かれなくなる．時刻 t に巨視系が状態 $|n\rangle$ に見出される確率を $P_n(t)$ とすれば

$$P_n(t) = \|\widetilde{|\chi_n(t)\rangle}\|^2 \ . \tag{4.2.28}$$

これを用いて，巨視系のエネルギーの期待値 $E_{\mathcal{S}}(t)$ は次式で与えられる．

$$E_{\mathcal{S}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n(t) \ . \tag{4.2.29}$$

---

*9　添字 $\mathcal{E}$ は環境 (environment) の頭文字．

*10　<u>巨視系と環境を合わせた全系の状態</u>ということを強調するために括弧 $\rangle$ を二つ書く．

これを巨視系エネルギーと呼ぶ.

式 (4.2.27) を, $n=0,1$ の部分に注目して以下のように書き直すことができる.

$$|\Psi(t)\rangle\rangle = e^{-i(E_0+E_1)t/2\hbar}\left\{|+\rangle\widetilde{|\chi_+(t)\rangle}+|-\rangle\widetilde{|\chi_-(t)\rangle}\right\} + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle\widetilde{|\chi_n(t)\rangle}\ , \tag{4.2.30}$$

$$\widetilde{|\chi_\pm(t)\rangle} := \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{it\Delta/2}\widetilde{|\chi_0(t)\rangle}\pm e^{-it\Delta/2}\widetilde{|\chi_1(t)\rangle}\right\}\ . \tag{4.2.31}$$

明らかに

$$\widetilde{|\chi_-(0)\rangle}=|\chi\rangle\ ,\quad \widetilde{|\chi_+(0)\rangle}=0\ , \tag{4.2.32}$$

$$\widetilde{|\chi_n(t)\rangle}=0\ :\ n\geqq 2\ . \tag{4.2.33}$$

後の議論のために, $\widetilde{|\chi_n(t)\rangle}$ を規格化しておく.

$$|\chi_n(t)\rangle := \{P_n(t)\}^{-1/2}\widetilde{|\chi_n(t)\rangle}\ . \tag{4.2.34}$$

時刻 t に巨視系が状態 $|\pm\rangle$ に見出される確率 $\mathcal{P}_\pm(t)$ を計算すれば

$$\mathcal{P}_\pm(t) = \|\widetilde{|\chi_\pm(t)\rangle}\|^2 = \frac{1}{2}[P_0(t)+P_1(t)\mp\mathcal{I}(t)]\ , \tag{4.2.35}$$

ただし

$$\mathcal{I}(t) := \Re\{e^{-it\Delta}\mathcal{C}(t)\}\ , \tag{4.2.36}$$

$$\mathcal{C}(t) := -2\widetilde{\langle\chi_0(t)}|\widetilde{\chi_1(t)\rangle} = 2\sqrt{P_0(t)P_1(t)}\{-\langle\chi_0(t)|\chi_1(t)\rangle\}\ . \tag{4.2.37}$$

巨視系エネルギー (4.2.29) には現れなかった干渉項 $\mathcal{I}$ に注目しよう. 因子 $\mathcal{C}(t)$ は干渉性の保たれている度合いの目安を与える. この場合の干渉性とは, 巨視系の状態 $|0\rangle, |1\rangle$ に着目したものである. $\mathcal{C}(t)$ は二つの因子から成る. 第一の因子 $2\{P_0(t)P_1(t)\}^{1/2}$ は, 巨視系が当該二状態 $|0\rangle, |1\rangle$ に見出される確率の時間依存性を反映する. 第二の因子 $-\langle\chi_0(t)|\chi_1(t)\rangle$ の絶対値は, $t=0$ のときには $|\chi_0(t)\rangle$ と $-|\chi_1(t)\rangle$ とが等しいから 1 であるが, 時間が経つにつれて両者の相対方向[*11]がずれてきて, 一般に減少する. 式 (4.2.35) を (4.2.8) と比べて, こ

---

*11 Hilbert 空間内での方向.

の第二の因子に (4.2.16) およびエネルギー準位のずれが潜んでいるはずであるとの結論に達する．位相攪乱という言葉を少し一般化して，$-\langle\chi_0(t)|\chi_1(t)\rangle$ を<u>**位相攪乱因子**</u>と呼ぶ．以上により，

位相攪乱効果を量子力学的に記述するには，環境をも量子力学的に扱うことが必要である

ということが分かる．位相攪乱因子は典型的には次のように振る舞うと期待されよう．

$$-\langle\chi_0(t)|\chi_1(t)\rangle \sim \exp\left\{-\left(\frac{1}{T_2'}+i\Delta'\right)t+i\theta_0\right\} \ : \ t \gg t_c \ . \qquad (4.2.38)$$

T_2' は位相攪乱の特性時間，Δ' と θ_0 は位相のずれ[*12]を表す定数である．これを (4.2.18), (4.2.21) と比較して，T_2' は $2/\mathcal{B}_0^2\tau_c$ に，Δ' はエネルギーのずれ $(\delta E_1-\delta E_0)/h$ に，それぞれ対応することが分かる．$P_n(t)$ が (4.2.5) のように振る舞うと仮定すれば，

$$E_{\mathcal{S}}(t) \simeq E_0+\frac{h\Delta}{2}e^{-t/T_1} \ : \ t \gg t_c \qquad (4.2.39)$$

$$\mathcal{I}(t) \simeq \begin{cases} e^{-t/T_2'}\cos(t\tilde{\Delta}-\theta_0) & : \ t_c \ll t \ll T_1 \ , \\ \sqrt{2}\ e^{-t/T_2}\cos(t\tilde{\Delta}-\theta_0) & : \ t \gtrsim T_1 \ , \end{cases} \qquad (4.2.40)$$

ただし

$$\frac{1}{T_2} \equiv \frac{1}{2T_1}+\frac{1}{T_2'} \ , \quad \tilde{\Delta} \equiv \Delta+\Delta' \ . \qquad (4.2.41)$$

長時間域における干渉項 $\mathcal{I}(t)$ の減少を特徴付ける特性時間 T_2 は，状態 $|1\rangle$ の寿命に起因する項 $(1/2T_1)$ と位相攪乱に起因する項 $(1/T_2')$ とからなる．また，量子共鳴振動の周波数は Δ から Δ' だけずれる．第 2.2 節で導入した架空スピン演算子を使って議論すれば，エネルギー散逸は $\langle\hat{S}_3\rangle(t)$ の減少に対応し，干渉項の減衰は $|\langle\hat{S}_-\rangle(t)|$ の減少（スピンの歳差運動の減衰）に対応する．それゆえ，T_1, T_2 はそれぞれ**縦緩和時間** (longitudinal relaxation time)，**横緩和時間** (transverse relaxation time) と呼ばれる．Δ' は磁気共鳴の**周波数偏移**

*12 前者は t に比例したずれ，後者は t によらないずれ．

(frequency shift) に対応する．これらは磁気緩和(または磁気共鳴)理論で伝統的に使われている言葉である[*13]．

4.3 散逸性環境

単純な性質[*14]を持つ環境模型を導入し，干渉性消失の理解に役立てよう．本節では散逸に焦点を当てた模型を考える．

巨視系の Hamiltonian は前節と同じく (4.2.1) で規定されるものとし(ただし本節では E_0 をエネルギーの原点に採る)，環境は Bose 粒子[*15]の集団とする．

$$\hat{H}_{\mathcal{E}} := \sum_{\alpha} \hbar\omega_\alpha \hat{b}_\alpha^\dagger \hat{b}_\alpha \ , \tag{4.3.1}$$

$$[\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} \ , \quad [\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\beta] = 0 \ . \tag{4.3.2}$$

$\hat{H}_{\mathcal{E}}$ の基底状態[*16]を $|\mathrm{vac}\rangle$，Bose 粒子 α が 1 個だけ存在する状態を $|\alpha\rangle$ と書く．

$$\hat{b}_\alpha|\mathrm{vac}\rangle = 0 \ , \quad |\alpha\rangle := \hat{b}_\alpha^\dagger|\mathrm{vac}\rangle \ . \tag{4.3.3}$$

巨視系と環境の相互作用として，巨視系が第 1 励起状態から基底状態に落ちるのに伴い Bose 粒子が 1 個だけ生成される，という状況を設定する．相互作用 Hamiltonian $\hat{H}_{\mathcal{SE}}$ は Hermite でなければならないから，逆に巨視系が基底状態から第 1 励起状態に上がるのに伴って Bose 粒子は 1 個だけ消滅するはずである[*17]．

$$\hat{H}_{\mathcal{SE}} := i\hbar \sum_{\alpha} \kappa_\alpha (\hat{S}_- \hat{b}_\alpha^\dagger - \hat{S}_+ \hat{b}_\alpha) \ , \tag{4.3.4}$$

$$\hat{S}_- := \hat{S}_1 - i\hat{S}_2 = -i|0\rangle\langle 1| \ , \quad \hat{S}_+ := \hat{S}_-^\dagger \ , \tag{4.3.5}$$

ただし κ_α は相互作用の強さを表す定数[*18]．全系の時間発展は Schrödinger 方

---

*13 例えば，C. P. Slichter, *Principles of Magnetic Resonance*, Harper and Row(1963)［益田義賀・雑賀亜幌訳：核磁気共鳴の原理，岩波書店(1996)］．

*14 環境が巨視系とどのように相互作用するか，その様式をも含めて環境の性質という．孤立した環境自体に興味があるわけではない．

*15 すなわち調和振動子．

*16 Bose 粒子が 1 個も存在しない状態，つまり真空 (vacuum)．

*17 $\hat{S}$ の定義は第 2.2 節．磁気緩和や量子光学の理論において，(4.3.4) 式の形の相互作用は(より一般的な相互作用に対する)**回転波近似** (rotating-wave approximation) と呼ばれることがある．

*18 $\hat{b}_\alpha$ の位相を調節することにより，$\kappa_\alpha > 0$ として一般性を損なわない．

程式 (4.2.24) によって定められる．ただちに明らかな通り，相互作用 (4.3.4) は全粒子数

$$\hat{\mathcal{N}}_{全} := \left(\frac{1}{2} + \hat{S}_3\right) + \sum_\alpha \hat{b}^\dagger_\alpha \hat{b}_\alpha \tag{4.3.6}$$

を保存する．

$$[\hat{H}, \hat{\mathcal{N}}_{全}] = 0 \ . \tag{4.3.7}$$

したがって，全系の Hilbert 空間を，$\hat{\mathcal{N}}_{全}$ の値の異なる部分空間に分割し，各部分空間内で時間発展を議論することができる．

状態 $|0,\mathrm{vac}\rangle\rangle\ (\equiv|0\rangle|\mathrm{vac}\rangle)$ は単独で $\hat{\mathcal{N}}_{全}=0$ の部分空間をなす．つまり，この状態は時間が経っても変化しない．$\hat{\mathcal{N}}_{全}=1$ の部分空間は，状態 $|1,\mathrm{vac}\rangle\rangle\ (\equiv |1\rangle|\mathrm{vac}\rangle)$ と $\{|0,\alpha\rangle\rangle\ (\equiv|0\rangle|\alpha\rangle)\}$ によって張られる．ゆえに，状態 $|1,\mathrm{vac}\rangle\rangle$ の時間発展は次の形になる．

$$c(t)|1,\mathrm{vac}\rangle\rangle + \sum_\alpha c_\alpha(t)|0,\alpha\rangle\rangle \ . \tag{4.3.8}$$

これを Schrödinger 方程式に代入すれば

$$\begin{aligned} &i\dot{c}(t)|1,\mathrm{vac}\rangle\rangle + i\sum_\alpha \dot{c}_\alpha(t)|0,\alpha\rangle\rangle \\ &\quad = c(t)\Delta|1,\mathrm{vac}\rangle\rangle \\ &\qquad + \sum_\alpha\{\omega_\alpha c_\alpha(t)|0,\alpha\rangle\rangle + c(t)\kappa_\alpha|0,\alpha\rangle\rangle + c_\alpha(t)\kappa_\alpha|1,\mathrm{vac}\rangle\rangle\} \ . \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

したがって

$$\dot{c}(t) = -i\left(c(t)\Delta + \sum_\alpha c_\alpha(t)\kappa_\alpha\right) \ , \tag{4.3.10}$$

$$\dot{c}_\alpha(t) = -i(c_\alpha(t)\omega_\alpha + c(t)\kappa_\alpha) \ . \tag{4.3.11}$$

初期条件

$$c(0) = 1 \ , \quad c_\alpha(0) = 0 \tag{4.3.12}$$

を考慮して，Laplace 変換*19

$$\tilde{f}(s) := \int_0^\infty dt\ e^{-st} f(t) \ : \ \Re s > 0 \tag{4.3.13}$$

*19　一般に線形微分方程式は Fourier 変換ないし Laplace 変換を利用して解くことができる．後者は初期値を自動的に取り込む形式になっているから，初期値問題に適している．

を使えば

$$s\tilde{c}(s)-1 = -i\Big(\tilde{c}(s)\Delta+\sum_\alpha \tilde{c}_\alpha(s)\kappa_\alpha\Big) , \tag{4.3.14}$$

$$s\tilde{c}_\alpha(s) = -i(\tilde{c}_\alpha(s)\omega_\alpha+\tilde{c}(s)\kappa_\alpha) . \tag{4.3.15}$$

この 2 式から $\tilde{c}_\alpha(s)$ を消去して

$$\tilde{c}(s) = \left(s+i\Delta+\sum_\alpha \frac{\kappa_\alpha^2}{s+i\omega_\alpha}\right)^{-1} . \tag{4.3.16}$$

相互作用で重みを付けた一粒子状態密度*20

$$J_B(\omega) := \sum_\alpha \kappa_\alpha^2\delta(\omega-\omega_\alpha) \tag{4.3.17}$$

を導入すると，

$$\tilde{c}(s) = \left(s+i\Delta+\int_0^\infty d\omega\ \frac{J_B(\omega)}{s+i\omega}\right)^{-1} . \tag{4.3.18}$$

以上の結果は，Bose 粒子を Fermi 粒子で置き換えても*21，あるいは $\hat{b}_\alpha$ をスピン 1/2 の下降演算子 $\hat{s}_-^{(\alpha)}$ で置き換えても，変わらない($\hat{\mathcal{N}}_{全}=1$ の部分空間においては粒子の統計性は利かない)．

$J_B(\omega)$ の形が与えられれば，上の ω 積分を実行し，$\tilde{c}(s)$ を Laplace 逆変換することによって $c(t)$ が得られる．特に相互作用が弱い($J_B(\Delta)\ll\Delta$)場合，時間域*22 $t\gg\omega_c^{-1}$ に着目すれば下記の近似が成立する．

$$c(t) \propto \exp(-it\tilde{\Delta}-\pi J_B(\tilde{\Delta})t) , \tag{4.3.19}$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta+\mathcal{P}\int_0^\infty d\omega \frac{J_B(\omega)}{\tilde{\Delta}-\omega} \quad (\mathcal{P}\text{ は主値}). \tag{4.3.20}$$

したがって

$$T_1 \simeq 1/2\pi J_B(\tilde{\Delta}) . \tag{4.3.21}$$

このような計算の詳細はさておき，次の初期状態を考えよう．

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |-,\mathrm{vac}\rangle\rangle \equiv |-\rangle|\mathrm{vac}\rangle . \tag{4.3.22}$$

これは式 (4.2.25) において環境の初期状態 $|\chi\rangle$ を $|\mathrm{vac}\rangle$ と採ったことに相当す

---

*20 次章の環境周波数分布函数 $J(\omega)$ と本質的に同じもの．

*21 ただし，その場合には演算子 $\hat{S}$ も別の Fermi 粒子で置き換えないと物理的模型とはいえない．

*22 ω_c は "$J_B(\omega)\simeq 0 : \omega>\omega_c$" となる特性周波数(次章参照)．

る．これの時間発展を (4.2.27) の形にまとめると，

$$\widetilde{|\chi_0(t)\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\mathrm{vac}\rangle - \sum_\alpha c_\alpha(t)|\alpha\rangle\right\}, \tag{4.3.23}$$

$$\widetilde{|\chi_1(t)\rangle} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{c(t)}|\mathrm{vac}\rangle, \quad \widetilde{c(t)} \equiv e^{it\Delta}c(t), \tag{4.3.24}$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2}|c(t)|^2, \tag{4.3.25}$$

$$P_0(t) = \frac{1}{2}\left(1+\sum_\alpha |c_\alpha(t)|^2\right) = 1 - P_1(t), \tag{4.3.26}$$

$$-\langle\chi_0(t)|\chi_1(t)\rangle = \frac{\widetilde{c(t)}/2}{\sqrt{P_0(t)P_1(t)}} = \frac{1}{\sqrt{2-|c(t)|^2}}\frac{\widetilde{c(t)}}{|c(t)|}. \tag{4.3.27}$$

散逸が起こると環境の状態も必然的に変化する．この模型では $|\chi_1(t)\rangle$ は $|\mathrm{vac}\rangle$ に留まるが $|\chi_0(t)\rangle$ の方向はずれる（図 4.1）．特に，長時間域（$t \gtrsim T_1$）における位相攪乱因子の絶対値はほぼ $1/\sqrt{2}$ である．よって，量子共鳴振動の振幅は散逸効果から単純に期待される振幅 $2\sqrt{P_0(t)P_1(t)}$ の $1/\sqrt{2}$ となる．これを位相攪乱効果（の一種）と呼ぶことの是非はともかく，環境を量子力学的に扱って初めて得られる効果である．なお，初期に巨視系の持っていたエネルギーは最終的には環境に移るけれども，途中で一時的に<u>相互作用に蓄えられる</u>（$\hat{H}_S + \hat{H}_\mathcal{E}$ は $\hat{H}$ と可換でない）．具体的に計算すれば

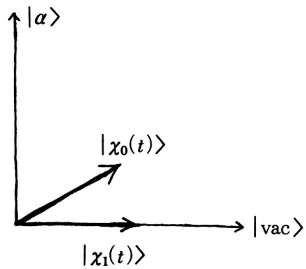


図 4.1　環境状態の変化

$$E_S(t) \equiv \langle\langle\Psi(t)|\hat{H}_S|\Psi(t)\rangle\rangle = \frac{h\Delta}{2}|c(t)|^2, \tag{4.3.28}$$

$$E_\mathcal{E}(t) \equiv \langle\langle\Psi(t)|\hat{H}_\mathcal{E}|\Psi(t)\rangle\rangle = \frac{1}{2}\sum_\alpha h\omega_\alpha|c_\alpha(t)|^2, \tag{4.3.29}$$

$$E_{S\mathcal{E}}(t) \equiv \langle\langle \Psi(t)|\hat{H}_{S\mathcal{E}}|\Psi(t)\rangle\rangle = \Re\left\{hc^*(t)\sum_\alpha \kappa_\alpha c_\alpha(t)\right\} . \quad (4.3.30)$$

$E_{S\mathcal{E}}(t)$ は負にもなり得ることに注意されたい．その絶対値の上限を Schwarz の不等式を用いて評価すると

$$|E_{S\mathcal{E}}(t)| \leqq h|c(t)|\{1-|c(t)|^2\}^{1/2}\left\{\sum_\alpha \kappa_\alpha^2\right\}^{1/2} \leqq \frac{h}{2}\left\{\sum_\alpha \kappa_\alpha^2\right\}^{1/2} . \quad (4.3.31)$$

したがって，相互作用が弱い場合に T_1 程度の時間尺度で現象を見る（van Hove 極限）ならば，$E_S(t)+E_{\mathcal{E}}(t)$ が t によらないように見える．

4.4 非散逸性環境

位相攪乱効果の本質を簡潔に見せてくれる環境模型として <u>**Coleman-Hepp 環境**</u>[*23]を採り上げる．エネルギーの原点を $(E_0+E_1)/2$ に採り，巨視系 Hamiltonian を次の形に書き直す．

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2}h\Delta(\hat{\Pi}_1-\hat{\Pi}_0)+\sum_{n=2}^{\infty}E_n\hat{\Pi}_n . \quad (4.4.1)$$

ただし

$$\hat{\Pi}_n := |n\rangle\langle n| \quad (4.4.2)$$

は状態 $|n\rangle$ への射影子である．環境は大きさ 1/2 のスピン N 個からなるとする．

$$環境 = \{\hat{\boldsymbol{s}}^{(j)}|\ j=1,\cdots,N\}\ :\ \left(\hat{\boldsymbol{s}}^{(j)}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) . \quad (4.4.3)$$

簡単のため環境自体の Hamiltonian は 0 とし，巨視系と環境との相互作用 Hamiltonian を次の形に採る．

$$\hat{H}_{S\mathcal{E}} := \hat{\Pi}_1\sum_{j=1}^{N}h\mathcal{B}_j(t-t_j)\hat{s}_1^{(j)}. \quad (4.4.4)$$

ただし，$\mathcal{B}_j(t)$ は幅 $2\delta_j$ のパルス型の函数である（図 4.2）．つまり，巨視系が状態 $|1\rangle$ にある場合，またその場合に限り，環境の第 j スピンに "x 方向" のパル

*23 これは元来，量子力学的測定過程を考察するために測定装置の模型（**Coleman-Hepp 模型**）として提案された．

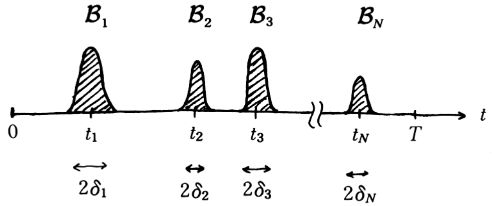


図 4.2 巨視系と Coleman-Hepp 環境の相互作用(パルス磁場)

ス磁場がかかる，これが上の相互作用の内容である*24．簡単のため，隣り合うパルスは互いに重なり合わないものとする．

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = T\ , \quad \delta_j + \delta_{j+1} < t_{j+1} - t_j\ . \qquad (4.4.5)$$

T は定数である．環境の各スピンについて，スピン上向きの状態 $|\uparrow\rangle^{(j)}$, 下向きの状態 $|\downarrow\rangle^{(j)}$ および θ 方向の状態 $|\theta\rangle^{(j)}$ を定義しておく．

$$\hat{s}_3^{(j)}|\uparrow\rangle^{(j)} = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle^{(j)}\ , \quad \hat{s}_3^{(j)}|\downarrow\rangle^{(j)} = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle^{(j)}\ , \qquad (4.4.6)$$

$$|\theta\rangle^{(j)} := \cos(\theta/2)|\downarrow\rangle^{(j)} - i\sin(\theta/2)|\uparrow\rangle^{(j)}\ . \qquad (4.4.7)$$

環境スピンがすべて下向きの状態を $|\mathrm{vac}\rangle$ と書く．

$$|\mathrm{vac}\rangle \equiv |\downarrow, \downarrow, \cdots, \downarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle^{(1)}|\downarrow\rangle^{(2)}\cdots|\downarrow\rangle^{(N)}\ . \qquad (4.4.8)$$

また

$$|\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N\rangle \equiv |\theta_1\rangle^{(1)}|\theta_2\rangle^{(2)}\cdots|\theta_N\rangle^{(N)}\ . \qquad (4.4.9)$$

以下，初期状態 (4.3.22) からの時間発展を調べよう．準備として

$$[\hat{\Pi}_n,\ \hat{H}] = 0 \qquad (4.4.10)$$

に着目する．したがって，巨視系の状態が $|n\rangle$ である部分空間 $\mathcal{H}_n$ ごとに考えればよい．$\hat{H}$ を $\mathcal{H}_n$ 上に制限して得られる演算子を $\hat{H}_n$ とすれば

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}h\Delta\ , \qquad (4.4.11)$$

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}h\Delta + \sum_{j=1}^{N} h\mathcal{B}_j(t - t_j)\hat{s}_1^{(j)}. \qquad (4.4.12)$$

これらはそれぞれ環境のみに作用する演算子である．対応する時間発展演算子

*24 $\hat{\Pi}_1$ を $\hat{\Pi}_0$ で置き換えても以下の議論の本質に影響しない．

を $\hat{U}_n(t)$ とおけば[*25]

$$\hat{U}_0(t) = \exp(it\Delta/2) \ , \tag{4.4.13}$$

$$\hat{U}_1(t) = \exp\left\{-it\Delta/2 - i\sum_{j=1}^{N}\theta_j(t)s_1^{(j)}\right\} \ , \tag{4.4.14}$$

ただし

$$\theta_j(t) \equiv \int_0^t dt'\mathcal{B}_j(t'-t_j) \ . \tag{4.4.15}$$

したがって

$$\hat{U}_0(t)|\mathrm{vac}\rangle = e^{it\Delta/2}|\mathrm{vac}\rangle \ , \tag{4.4.16}$$

$$\hat{U}_1(t)|\mathrm{vac}\rangle = e^{-it\Delta/2}|\theta_1(t), \theta_2(1), \cdots, \theta_N(t)\rangle \ . \tag{4.4.17}$$

つまり，巨視系が状態 $|1\rangle$ にある場合，環境の第 j スピンの時刻 t における向きは $\theta_j(t)$ で与えられる．もともと下を向いていたスピンが，パルス磁場を受けて回転するわけである．つまり，式 (4.4.15) で定義される $\theta_j(t)$ は第 j スピンの回転角を表す．以上を用いて

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle\rangle &= \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|0\rangle\hat{U}_0(t)|\mathrm{vac}\rangle - |1\rangle\hat{U}_1(t)|\mathrm{vac}\rangle\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{it\Delta/2}|0, \mathrm{vac}\rangle\rangle - e^{-it\Delta/2}|1,\ \theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \cdots,\ \theta_N(t)\rangle\rangle\right\} \ .\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

すなわち，

$$\widetilde{|\chi_0(t)\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{vac}\rangle \ , \tag{4.4.19}$$

$$\widetilde{|\chi_1(t)\rangle} = -\frac{1}{\sqrt{2}}|\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \cdots,\ \theta_N(t)\rangle \ . \tag{4.4.20}$$

ゆえに，(4.2.28) と (4.2.37) を用いて

---

*25　Hamiltonian が時間によっているから $\hat{U}(t)$ を式 (4.2.26) のように単純に書くことはできない．しかし，$\hat{H}_1$ に含まれる演算子 $\{\hat{s}_1^{(j)}\}$ は互いに可換，ゆえに以下のように積分できる．

$$\mathcal{P}_{\pm}(t) = \frac{1}{2}[1 \mp \Re\{e^{-it\Delta}\mathcal{C}(t)\}] , \qquad (4.4.21)$$

$$\mathcal{C}(t) = \langle \mathrm{vac}|\theta_1(t),\ \theta_2(t),\ \cdots,\ \theta_N(t)\rangle = \prod_{j=1}^{N} \cos\{\theta_j(t)/2\} . \qquad (4.4.22)$$

巨視系が環境と相互作用しない場合には，もちろんすべての $\theta_j(t)$ が 0，つまり任意の時刻で $\mathcal{C}(t)=1$ である．相互作用のある場合，パルスの強さ

$$\theta_j \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{B}_j(t) \qquad (4.4.23)$$

は 2π の整数倍ではないとしよう．時間 t が経過するにつれ各 $\theta_j(t)$ が順次 θ_j になるから，$|\mathcal{C}(t)|$ は少なくとも大局的には t とともに減少する．特に

$$\mathcal{B}_j(t) > 0, \quad 0 < \theta_j < \pi \ :\ \forall t,\ \forall j \qquad (4.4.24)$$

なら単調に減少する．もし $N \gg 1$ であれば，$|\mathcal{C}(t)|$ は t が T に近づくにつれて限りなく 0 に近づき，量子共鳴振動の振幅は減衰する(図 4.3)．つまり干渉性が失われる．

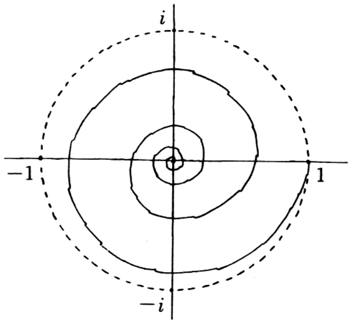


図 4.3　Coleman-Hepp 環境における干渉性の目安 $e^{-it\Delta}\mathcal{C}(t)$

なお，この模型では巨視系のエネルギーは保存される．

$$[\hat{H}_{\mathcal{S}}, \hat{H}] = 0 . \qquad (4.4.25)$$

したがって，エネルギー散逸は生ぜず，上述の干渉性消失は純粋に位相攪乱によるものといえる．

4.5 量子 Zeno 効果

標題の効果は，約 20 年前に“量子論における Zeno の逆理”という名で提唱された．その内容は，“準安定状態に用意された系を観測し続けると，観測による波束の収縮のため，当該の状態は崩壊しない”というものであった．数年前には“量子 Zeno 効果と考えられる現象を実験で検出した，したがって波束の収縮が実証された”と主張する論文も出版され物議を醸した*26．“矢は飛べない”という Zeno の逆理に似た現象が，系と環境(測定操作自体をも含む)との強い相互作用によって引き起こされることは，Schrödinger 方程式の一般的構造から直接的に予言され，量子力学の枠内で自然に理解される．現在では，これを逆理と言わず効果と呼ぶのが通例となっている*27．上述の実験はその一例であり，波束の収縮を仮定してもしなくても説明できるということに落ち着いている．

量子 Zeno 効果は，巨視系に対する環境の効果を論ずる際に引き合いに出されることがある．しかし，量子 Zeno 効果を引き起こす環境は，次節で述べる調和環境とは大きく異なり，巨視系と強く相互作用する環境であって，現実には稀である．にもかかわらず，この効果は干渉性消失機構の一側面を論ずる上で興味深いので，以下に簡単な模型を用いて解説しておこう*28．環境としては前節の Coleman-Hepp 環境と同じものを考え，その初期状態を $|\mathrm{vac}\rangle$ とする．一方，巨視系としては一般的な系を考え，その初期状態を $|\psi\rangle$ とする．

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |\psi, \mathrm{vac}\rangle\rangle \equiv |\psi\rangle|\mathrm{vac}\rangle\ . \tag{4.5.1}$$

巨視系と環境の相互作用は次のような特殊な形であるとする．

$$\hat{H}_{\mathcal{SE}} := \hat{\Pi}\sum_{j=1}^{N} h\mathcal{B}_j(t-t_j)\hat{s}_1^{(j)}\ , \quad \hat{\Pi} \equiv 1-|\psi\rangle\langle\psi|\ , \tag{4.5.2}$$

---

*26 ただし，この主張はすぐに撤回された．

*27 “Watched pot never boils” という諺にちなんで watched-pot effect と呼ばれることもある．

*28 量子 Zeno 効果自体は，当該の系の巨視性の度合いと無関係であって，巨視系が実は微視的な系であっても以下の議論はそのまま成立する．本節では，前節との関連上，当該の系を巨視系と呼ぶに過ぎない．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ \mathcal{B}_j(t) = \pi\ :\ \forall j\ . \tag{4.5.3}$$

この相互作用は，(4.4.4)に似ているが，巨視系が初期状態と直交する状態にあるときだけに利くという点，および，パルスが π **パルス**であるという点において異なる．以下，簡単のためパルスは等間隔(時間間隔 τ)かつパルス幅 δ は充分狭いものとする．

$$t_j = j\tau\ ,\quad \delta_j = \delta \ll \tau_S\ . \tag{4.5.4}$$

幅 δ の定義は図 4.2 と同じであり，τ_S は環境から切り離された巨視系の時間変化に特徴的な時間尺度である(例えば，巨視系が二状態 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で記述されるならば $\tau_S \sim \Delta^{-1}$)．

さて巨視系独自の時間発展を

$$\exp(-it\hat{H}_S/h)|\psi\rangle = c(t)|\psi\rangle + |\phi(t)\rangle \tag{4.5.5}$$

と書くことができる．ただし $|\phi(t)\rangle$ は，一般に規格化されていないが，$|\psi\rangle$ と直交した状態である．

$$\langle\psi|\phi(t)\rangle = 0\ . \tag{4.5.6}$$

以下，全系の状態の時間変化を，各期間ごとに追ってみよう．

(1) $0 < t < \tau - \delta$

この期間には $\hat{H} = \hat{H}_S$ であるから，(4.5.5) により

$$|\Psi(\tau-\delta)\rangle\rangle = c(\tau)|\psi, \mathrm{vac}\rangle\rangle + |\phi_1, \mathrm{vac}\rangle\rangle\ ,\quad |\phi_1\rangle := |\phi(\tau)\rangle\ . \tag{4.5.7}$$

右辺の c と ϕ の引数は，正確には $\tau - \delta$ であるが，条件 (4.5.4) を用いて τ とした．

(2) $\tau - \delta < t < \tau + \delta$

この期間には，条件 (4.5.4) により $\hat{H}_S$ を無視してよく，$\hat{H} \simeq \hat{H}_{S\mathcal{E}}$ である．したがって，時刻 $\tau - \delta$ から t までの時間発展演算子 $\hat{U}(t, \tau-\delta)$ は，式 (4.4.15) で定義されるスピン回転角 $\theta_j(t)$ を用いて，

$$\hat{U}(t, \tau-\delta) = \exp\{-i\hat{\Pi}\theta_1(t)\hat{s}_1^{(1)}\} = (1-\hat{\Pi}) + \hat{\Pi}\exp\{-i\theta_1(t)\hat{s}_1^{(1)}\}\ . \tag{4.5.8}$$

ゆえに

$$\hat{U}(\tau+\delta,\tau-\delta)=(1-\hat{\Pi})+\hat{\Pi}\exp\{-i\pi\hat{s}_1^{(1)}\}\ , \tag{4.5.9}$$

$$\begin{aligned}|\Psi(\tau+\delta)\rangle\rangle &= \hat{U}(\tau+\delta,\tau-\delta)|\Psi(\tau-\delta)\rangle\rangle \\ &= c(\tau)|\psi,\text{vac}\rangle\rangle+|\phi_1,\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle\ .\end{aligned} \tag{4.5.10}$$

(3) $\tau+\delta<t<2\tau-\delta$

この期間には再び $\hat{H}=\hat{H}_S$ であるから，(4.5.5) により

$$|\Psi(2\tau-\delta)\rangle\rangle=c(\tau)\{c(\tau)|\psi,\text{vac}\rangle\rangle+|\phi_1,\text{vac}\rangle\rangle\}+|\tilde{\phi},\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle\ , \tag{4.5.11}$$

ただし

$$|\tilde{\phi}\rangle:=\exp(-i\tau\hat{H}_S/h)|\phi_1\rangle=:c_1(\tau)|\psi\rangle+|\phi_2\rangle\ ,\quad \langle\psi|\phi_2\rangle=0\ . \tag{4.5.12}$$

$\hat{U}(2\tau+\delta,2\tau-\delta)$ は $\hat{U}(\tau+\delta,\tau-\delta)$ と同様の式で与えられるから

$$\begin{aligned}|\Psi(2\tau+\delta)\rangle\rangle &= \hat{U}(2\tau+\delta,2\tau-\delta)|\Psi(2\tau-\delta)\rangle\rangle \\ &= \{c(\tau)\}^2|\psi,\text{vac}\rangle\rangle+c(\tau)|\phi_1,\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle \\ &\quad + c_1(\tau)|\psi,\uparrow\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle+|\phi_2,\uparrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\rangle\ .\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

以下同様にして，時刻 $T\,(\equiv N\tau+\delta)$ における状態が次の形になることが分かる．

$$|\Psi(T)\rangle\rangle=\{c(\tau)\}^N|\psi,\text{vac}\rangle\rangle+\sum_{n\geqq 0}|\tilde{\psi}_n,\star_n\rangle\rangle\ . \tag{4.5.14}$$

ここで $|\tilde{\psi}_n\rangle$ は巨視系の状態，また $|\star_n\rangle$ は環境の状態であって，すべて $|\text{vac}\rangle$ と直交するものである．

$$\langle\text{vac}|\star_n\rangle=0\ :\ \forall n\ . \tag{4.5.15}$$

一方，$|\tilde{\psi}_n\rangle$ は一般に $|\psi\rangle$ と直交しない．例えば $N=2$ ならば

$$\begin{aligned}&|\tilde{\psi}_0\rangle=c_1(\tau)|\psi\rangle\ ,\quad |\tilde{\psi}_1\rangle=c(\tau)|\phi_1\rangle\ ,\quad |\tilde{\psi}_2\rangle=|\phi_2\rangle\ ,\\ &\quad|\tilde{\psi}_n\rangle=0\ :n\geqq 3\ ,\\ &|\star_0\rangle=|\uparrow\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\ ,\quad |\star_1\rangle=|\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\ ,\quad |\star_2\rangle=|\uparrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle\ .\end{aligned}$$

式 (4.5.14) から，時刻 T において全系が初期状態に見出される確率 $P_{全}(t)$ を計算すると，

$$P_{全}(T) = |\langle\langle \Psi(0)|\Psi(T)\rangle\rangle|^2 = p^N \ , \quad p := |c(\tau)|^2 \ . \tag{4.5.16}$$

ところが (4.5.5) より

$$c(\tau) = \langle\psi|\exp(-i\tau\hat{H}_{\mathcal{S}}/h)|\psi\rangle \ . \tag{4.5.17}$$

したがって

$$p = 1-(\tau/\tau_Q)^2 + \mathcal{O}(\tau^4) \ , \quad \tau_Q := h/\triangle E \ . \tag{4.5.18}$$

ただし $\triangle E$ は巨視系の初期状態におけるエネルギーの不確定度であり，τ_Q はそれに応じた特性時間 (quantum indeterminacy time) である．

$$(\triangle E)^2 := \langle\psi|\big(\hat{H}_{\mathcal{S}} - \langle\psi|\hat{H}_{\mathcal{S}}|\psi\rangle\big)^2|\psi\rangle \ . \tag{4.5.19}$$

さて，T を一定に保ちつつ N を大きくして

$$\tau/\tau_Q \simeq T/N\tau_Q \ll 1 \tag{4.5.20}$$

とすれば，

$$P_{全}(T) > 1 - N^{-1}(T/\tau_Q)^2 \ . \tag{4.5.21}$$

通常，実験家にとって，環境がどんな状態に見出されるかは関知するところではない．したがって，興味のある量は $P_{全}(T)$ ではなく，むしろ巨視系がその初期状態に見出される確率 $P_{\mathcal{S}}(T)$ である．

$$P_{\mathcal{S}}(T) = |\langle\langle\psi, \mathrm{vac}|\Psi(T)\rangle\rangle|^2 + \sum_{\star} |\langle\langle\psi, \star\,|\Psi(T)\rangle\rangle|^2 \ . \tag{4.5.22}$$

ただし $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ の基底系として

$$\{|\mathrm{vac}\rangle, |\star\rangle \mid \langle\star|\mathrm{vac}\rangle = 0\}$$

を採った．右辺第 1 項は $P_{全}(T)$ に他ならない．当然ながら確率は 1 以下の量である．したがって

$$1 \geqq P_{\mathcal{S}}(T) \geqq P_{全}(T) \ . \tag{4.5.23}$$

これと式(4.5.21)を組み合わせると

$$0 \leqq 1 - P_{\mathcal{S}}(T) \leqq N^{-1}(T/\tau_Q)^2 \ . \tag{4.5.24}$$

ゆえに，T を一定に保ちつつ $N \to \infty$ とすれば $P_{\mathcal{S}}(T) \to 1$ となる，すなわち，時刻 T において巨視系は確実に初期状態に見出される．T の大きさにかかわらず，(4.5.24) の右辺が充分小さいという状況を設定することが原理的には可能であろう．というわけで，次の結論に導かれる．

環境と頻繁に（式 (4.5.20)）かつ強く（式 (4.5.3)）相互作用することにより，

"巨視系が初期状態に事実上(式 (4.5.24))留まり続ける" という事態が起こり得る.

巨視系として，例えば MQT 状況に設定された SQUID を考え，その初期状態が準安定井戸内に局在した波束で表されたとしよう．もし，環境との相互作用がパルス的であり，しかもそれが井戸の外においてのみ利くとすれば，上述の効果が起こるはずである．つまり，そのような特殊な状況においては，準安定状態の崩壊(巨視系の波動函数が井戸の外に滲み出すこと)が抑制される．ただし，SQUID の場合の環境が現実にこのような特殊なものであるとは考えられない.

なお，環境スピンを測定装置の模型とみなし，スピン上向き・下向きの状態をそれぞれ装置が作動した状態・作動しない状態に対応させれば，本節で論じた模型は N 回繰り返し測定の模型となる．上の結果によれば，$N \to \infty$ の極限では装置が作動する確率は 0，つまり装置は全く作動しない．にもかかわらず，これはれっきとした測定行為を果たしている*29.

演習問題

4.1 相関時間 τ_c の定常雑音の例として

$$\overline{\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)} = \mathcal{B}_0^2 \exp(-2|t_2 - t_1|/\tau_c) \tag{4.5.25}$$

を考え，式 (4.2.21) を示せ．なお，この式を出すだけなら，形式的に**白色雑音** (white noise)

$$\overline{\mathcal{B}(t_2)\mathcal{B}(t_1)} = \mathcal{B}_0^2 \tau_c \delta(t_2 - t_1) \tag{4.5.26}$$

を仮定すれば済む．しかし，測定可能な物理量が厳密にデルタ函数に比例することはあり得ない．τ_c に比べて長い時間尺度のみに着目する場合には，実効的に式 (4.5.26) のように見えるというだけである．例 (4.5.25) について，式 (4.2.21) に対する補正項を求めよ.

4.2 二状態系を表すスピン演算子(2.2.14) の，状態 (4.2.30) に関する期待値を $P_0(t), P_1(t), \mathcal{C}(t)$ で表せ.

4.3 $J_B(\omega)$ として，ω_c を中心とする幅 W の Lorentz 型状態密度

*29 このような測定過程は "negative-result measurement" と呼ばれることがある．しかし，測定結果を negative と見るか positive と見るかは主観的問題であろう.

$$J^{\text{Lorentz}}(\omega) := \kappa^2 \frac{W/2\pi}{(\omega-\omega_{\text{c}})^2+(W/2)^2}, \tag{4.5.27}$$

または次章の式 (5.3.7) で与えられる $J(\omega)$ を採用し，式 (4.3.8) の $c(t), c_\alpha(t)$ を計算せよ．また，その結果を用いて $E_{\mathcal{S}}(t), E_{\mathcal{E}}(t), E_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t)$ を調べよ．

4.4　第 4.3 節にて，環境が初期に熱平衡状態にあったとすれば，結果はどうなるか．環境の Bose 粒子を Fermi 粒子または大きさ 1/2 のスピンで置き換えた場合についても論ぜよ．

4.5　式 (4.4.22) で与えられる $\mathcal{C}(t)$ の絶対値が時間が経つにつれて指数函数的に減少するのはどのような場合か．

4.6　第 4.4–4.5 節の模型において，相互作用 Hamiltonian(4.4.4) が t によっているのはいささか人為的である．この模型と本質的に同じ性質を示し，かつ Hamiltonian が t に依存しない模型を考案せよ．（例えば，環境スピンが直線上に等間隔で並んでいるとし，この直線に沿って巨視系が動いて行くとするのが一案．これが元来の Coleman-Hepp 模型*30 である．）

---

*30　K. Hepp, Helv. Phys. Acta 45(1972), 237.

5 調和環境

環境として N 個の調和振動子(環境振動子と呼ぶ)の集団を考える．巨視系と環境の相互作用 Hamiltonian は，各環境振動子の位置変数に関して線形であるとする．現実の環境の多くがこの模型で記述されるものと期待される．本章では，この環境に対して物理的描像を得ることを目的とし，古典的状況においてその効果を調べる．

5.1 線形相互作用調和環境模型

巨視系 Hamiltonian $\hat{H}_S$ は (1.4.18) で与えられているとし，巨視系と環境を合わせた全系の Hamiltonian $\hat{H}$ として下記を仮定する[*1]．

$$\hat{H} := \hat{H}_S + \sum_\alpha \Big[\frac{1}{2m_\alpha}\hat{p}_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 \{\hat{x}_\alpha - f_\alpha(\hat{R})\}^2 \Big] - \frac{1}{2}\sum_\alpha \hbar\omega_\alpha \ , \tag{5.1.1}$$

$$[\hat{R}, \hat{P}] = i\hbar \ , \ [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta} \ , \ \text{その他の交換子はすべて } 0 \ . \tag{5.1.2}$$

これを線形相互作用調和環境模型 (linearly-coupled harmonic-environment model) と呼ぶ．$f_\alpha(R)$ は R の勝手な函数である．最後の定数項はエネルギーの原点をずらすだけであるからなくてもよいが，後の便宜上つけておいた．この Hamiltonian は次のように書き直すこともできる．

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_\mathcal{E} + \hat{H}_{S\mathcal{E}} \ , \tag{5.1.3}$$

$$\hat{H}_\mathcal{E} := \sum_\alpha \Big(\frac{1}{2m_\alpha}\hat{p}_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_\alpha \omega_\alpha^2 \hat{x}_\alpha^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega_\alpha \Big) \ , \tag{5.1.4}$$

---

*1 α 和は 1 から N まで．

$$\hat{H}_{\mathcal{SE}} := -\sum_\alpha m_\alpha \omega_\alpha^2 f_\alpha(\hat{R})\hat{x}_\alpha + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \omega_\alpha^2 \{f_\alpha(\hat{R})\}^2 \ . \qquad (5.1.5)$$

最後の式の右辺第 2 項は，$\hat{R}$ のみに依存し $\hat{x}_\alpha$ を含まない．したがってこの項は，相互作用 Hamiltonian $\hat{H}_{\mathcal{SE}}$ に入れず，むしろ $\hat{H}_{\mathcal{S}}$ に入れるのが自然と考えるのが一見正当に思われる．にもかかわらず，あえて上のように整理した．その理由は第 6 節で明らかになる．

第 2.1 節に従い，そこで導入した R_0, U_0, τ_0 を単位に採って $\hat{H}_{\mathcal{S}}$ を標準化する．これに応じて，式 (5.1.1)–(5.1.5) に出てきた x_α, p_α, ω_α, f_α, H のことを $x_{\alpha\urcorner}$, $p_{\alpha\urcorner}$, $\omega_{\alpha\urcorner}$, $f_{\alpha\urcorner}$, $H_\urcorner$ と書き，改めて無次元量 x_α, p_α, ω_α, f_α, H を定義する．

$$x_\alpha := (m_\alpha/M)^{1/2} x_{\alpha\urcorner}/R_0 \ , \quad p_\alpha := (m_\alpha U_0)^{-1/2} p_{\alpha\urcorner} \ , \qquad (5.1.6)$$

$$\omega_\alpha := \omega_{\alpha\urcorner}\tau_0 \ , \quad f_\alpha(q) := (m_\alpha/U_0\tau_0^2)^{1/2} f_{\alpha\urcorner}(R_0 q + R_m) \ , \qquad (5.1.7)$$

$$H := H_\urcorner/U_0 =: H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{E}} + H_{\mathcal{SE}} \ . \qquad (5.1.8)$$

すると

$$\hat{H}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{q}) \ , \qquad (5.1.9)$$

$$\hat{H}_{\mathcal{E}} = \sum_\alpha \left(\frac{1}{2}\hat{p}_\alpha^2 + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2 \hat{x}_\alpha^2 - \frac{1}{2}h\omega_\alpha \right) \ , \qquad (5.1.10)$$

$$\hat{H}_{\mathcal{SE}} = -\sum_\alpha \omega_\alpha^2 f_\alpha(\hat{q})\hat{x}_\alpha + \frac{1}{2}\sum_\alpha \omega_\alpha^2 \{f_\alpha(\hat{q})\}^2 \ , \qquad (5.1.11)$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = ih \ , \quad [\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] = ih\delta_{\alpha\beta} \ . \qquad (5.1.12)$$

もちろん h は (2.1.8) で定義される無次元化された Planck 定数である．

この模型の表す物理的状況について，以下の二通りの見方ができる．第一は，各環境振動子 α が巨視系から力 $\omega_\alpha^2 f_\alpha(q)$ を受けるという見方である．言い換えれば，(5.1.1) の書き方に戻って

$$H_{\mathcal{E}} + H_{\mathcal{SE}} = \sum_\alpha \left[\frac{1}{2}p_\alpha^2 + \frac{1}{2}\omega_\alpha^2 \{x_\alpha - f_\alpha(q)\}^2 - \frac{1}{2}h\omega_\alpha \right] \qquad (5.1.13)$$

とすれば分かるように，ばね定数 ω_α^2 の環境振動子の原点が $f_\alpha(q)$ だけずれるという見方である．このずれの q 依存性がすべての α に共通の場合を，共通線形

相互作用調和環境模型(略して**共通一次模型**)と呼ぶ*2.

$$\text{共通一次模型} : f_\alpha(q) = \gamma_\alpha f(q) , \ f(0) = 0 . \tag{5.1.14}$$

$f(q)$ は q の勝手な函数であり，γ_α は正定数である*3.

第二は，(5.1.14) の $f(q)$ が q に比例する場合に適用できる見方である．この場合には $\hat{H}_{\mathcal{SE}}$ (の第1項) が $\hat{x}_\alpha$ についても q についても線形であるから，双線形相互作用調和環境模型(略して**双一次模型**)と呼ぶ.

$$\text{双一次模型} : f_\alpha(q) = \gamma_\alpha q . \tag{5.1.15}$$

この場合，Hamiltonian を次の形に書くことができる.

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \bar{V}(q) + \sum_\alpha \left\{ \frac{1}{2}p_\alpha^2 + \frac{1}{2}(1-\gamma_\alpha)\omega_\alpha^2 x_\alpha^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega_\alpha \right\} + \frac{1}{2}\sum_\alpha \gamma_\alpha \omega_\alpha^2 (x_\alpha - q)^2 , \tag{5.1.16}$$

$$\bar{V}(q) \equiv V(q) - \frac{1}{2}\left\{ \sum_\alpha \gamma_\alpha (1-\gamma_\alpha)\omega_\alpha^2 \right\} q^2 . \tag{5.1.17}$$

つまり，ばね定数 $(1-\gamma_\alpha)\omega_\alpha^2$ の各環境振動子が，粒子 q とばね定数 $\gamma_\alpha \omega_\alpha^2$ のばねで結ばれている，と見ることができる．その代わり，粒子 q の感ずるポテンシャルは $V(q)$ ではなく $\bar{V}(q)$ となる (図 5.1)．ただし，"外力ポテンシャル V の

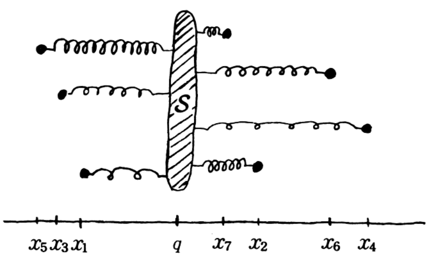


図 5.1 環境振動子とばねで結ばれた粒子(巨視系)

もとで運動する $(N+1)$ 個の質点 $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_{N+1}\}$ があって，それらの重心位置が q，相対位置が $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$" というわけではない．もしそうならば，$V$

*2 α 依存性と q 依存性が分離できるという意味で "可分 (separable) 模型" と呼ばれることもある.

*3 $f(0)=0$ という条件を課しても一般性を失わない．また，$\gamma_\alpha > 0$ として一般性を失わない．変換 $(\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\alpha) \to (-\hat{p}_\alpha, -\hat{x}_\alpha)$ によって，(5.1.12) に抵触することなく，γ_α の符号は自在に変えられる.

が q のみの函数になるのは，$V(q) \propto q$ (例えば一様電場や重力場) の場合に限られる．第 1 章で述べたように，本書で関心があるのは，q が一般的な集団自由度，$\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ がそのまわりの揺らぎを表す大衆自由度，という場合である．

後の議論に便利なように，環境振動子の昇降演算子を導入しておく．

$$\hat{b}_\alpha := \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\omega_\alpha/h)^{1/2}\hat{x}_\alpha + i(h\omega_\alpha)^{-1/2}\hat{p}_\alpha\right\}\,, \tag{5.1.18}$$

$$[\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}\,, \quad [\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\beta] = 0\,. \tag{5.1.19}$$

これを用いると

$$\hat{H}_\mathcal{E} = \sum_\alpha h\omega_\alpha \hat{b}_\alpha^\dagger \hat{b}_\alpha\,, \tag{5.1.20}$$

$$\hat{H}_{\mathcal{SE}} = -\sqrt{\frac{h}{2}}\sum_\alpha \omega_\alpha^{3/2} f_\alpha(\hat{q})(\hat{b}_\alpha + \hat{b}_\alpha^\dagger) + \frac{1}{2}\sum_\alpha \omega_\alpha^2 \{f_\alpha(\hat{q})\}^2\,, \tag{5.1.21}$$

すなわち

$$\hat{H}_\mathcal{E} + \hat{H}_{\mathcal{SE}} = \sum_\alpha h\omega_\alpha \left\{\hat{b}_\alpha^\dagger - \sqrt{\frac{\omega_\alpha}{2h}}\,f_\alpha(\hat{q})\right\}\left\{\hat{b}_\alpha - \sqrt{\frac{\omega_\alpha}{2h}}\,f_\alpha(\hat{q})\right\}. \tag{5.1.22}$$

5.2 Heisenberg 運動方程式，その 1

線形相互作用調和環境模型の性質を知るために，まず，Heisenberg の運動方程式を調べてみよう．この方程式は，特に古典力学との対比を論ずるのに適している．適当に基準時刻 t_0 (これを初期時刻と呼ぶ) を採り，Schrödinger 描像 (Schrödinger picture)[*4] の演算子 $\hat{A}$ に対応する Heisenberg 描像の演算子 $\hat{A}(t)$ を次式で定義する．

$$\hat{A}(t) := \exp\{i(t-t_0)\hat{H}/h\}\hat{A}\,\exp\{-i(t-t_0)\hat{H}/h\}\,. \tag{5.2.1}$$

すると $\hat{q}(t)$ の従う Heisenberg 運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{q}(t) = \frac{d}{dt}\hat{p}(t) = -\tilde{V}'(\hat{q}(t)) + \sum_\alpha \omega_\alpha^2 [f'_\alpha(\hat{q}(t))\hat{x}_\alpha(t)]_+\,, \tag{5.2.2}$$

---

*4　伝統的には “Schrödinger representation” と呼ばれ，“Schrödinger 表示” と日本語に訳されるが，演算子の表現 (representation) などと紛らわしいので，最近は picture と呼ばれることが多い．

$$\tilde{V}(q) := V(q) + \frac{1}{2}\sum_\alpha \omega_\alpha^2 \{f_\alpha(q)\}^2 \ . \tag{5.2.3}$$

ただし $\tilde{V}'(q)$, $f'_\alpha(q)$ の $'$ は q 微分を表し，

$$[\hat{A}\hat{B}]_+ := \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger) \tag{5.2.4}$$

は，演算子の積を明白に Hermite な形に書くための記号である．共通の時刻 t における $f'_\alpha(\hat{q}(t))$ と $\hat{x}_\alpha(t)$ は可換であるから，この記号は，上式の段階では不要である．しかし，異なる時刻の演算子の積が現れる場合 (後述の式 (5.2.12) など) において有用となる．

一方，$\hat{b}(t)$ に対する方程式は

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega_\alpha\right)\hat{b}_\alpha(t) = i\sqrt{\frac{\omega_\alpha^3}{2h}}\, f_\alpha(\hat{q}(t)) \ . \tag{5.2.5}$$

これを導くには (5.1.21) を使うと便利である．この方程式は，お馴染み調和振動子の強制振動方程式を変数 $\hat{x}_\alpha(t)$ の代わりに $\hat{b}_\alpha(t)$ で表したものである．これは定数変化法 (量子力学用語では相互作用描像) を用いて造作なく解かれるが，ここでは少々もったいぶって，左辺の微分演算子に対する**遅延 Green 函数** (retarded Green function) $\tilde{\mathcal{G}}_\alpha$ を導入しよう．

$$\tilde{\mathcal{G}}_\alpha(t) := \theta(t)\exp(-i\omega_\alpha t) \ , \tag{5.2.6}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + i\omega_\alpha\right)\tilde{\mathcal{G}}_\alpha(t-t') = \delta(t-t') \ . \tag{5.2.7}$$

踏段函数 $\theta(t-t')$ が**遅延**を表す．これを使って特解を求め，かつ定義 (5.2.1) から要求される初期条件

$$\hat{b}(t_0) = \hat{b} \tag{5.2.8}$$

を考慮すると

$$\hat{b}_\alpha(t) = e^{-i(t-t_0)\omega_\alpha}\hat{b}_\alpha + i\sqrt{\frac{\omega_\alpha^3}{2h}}\int_{t_0}^t dt' e^{-i(t-t')\omega_\alpha} f_\alpha(\hat{q}(t')) \ . \tag{5.2.9}$$

第1項 (いわゆる斉次解) を無視することは許されない．これを残しておかないと，任意の時刻で成立すべき次の交換関係が満たされなくなる．

$$[\hat{b}_\alpha(t), \hat{b}_\beta^\dagger(t)] = \delta_{\alpha\beta} \ , \quad [\hat{b}_\alpha(t), \hat{b}_\beta(t)] = 0 \ . \tag{5.2.10}$$

ゆえに

$$\hat{x}_\alpha(t) = \sqrt{\frac{h}{2\omega_\alpha}}\{\hat{b}_\alpha(t) + \hat{b}^\dagger_\alpha(t)\}$$
$$= \sqrt{\frac{h}{2\omega_\alpha}}\{e^{-i(t-t_0)\omega_\alpha}\hat{b}_\alpha + \text{h.c.}\}$$
$$+ \omega_\alpha \int_{t_0}^{t} dt' \sin((t-t')\omega_\alpha) f_\alpha(\hat{q}(t')) \; . \tag{5.2.11}$$

これを (5.2.2) に代入して $\hat{x}_\alpha(t)$ を消去すれば，変数 $\hat{q}(t)$ について閉じた方程式を得る．

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{q}(t) + \tilde{V}'(\hat{q}(t')) - \int_{t_0}^{t} dt' \sum_\alpha \omega_\alpha^3 [f'_\alpha(\hat{q}(t)) \sin((t-t')\omega_\alpha) f_\alpha(\hat{q}(t'))]_+$$
$$= \sqrt{\frac{h}{2}} \sum_\alpha \omega_\alpha^{3/2} [(e^{-i(t-t_0)\omega_\alpha}\hat{b}_\alpha + \text{h.c.}) f'_\alpha(\hat{q}(t))]_+ \; . \tag{5.2.12}$$

環境の自由度が消去された代償として，この方程式は "時間に関して非局所的" である，すなわち，$\hat{q}(t)$ の運動は，それ自身の過去の履歴に影響される (左辺第 3 項)．また，環境の自由度が消去されたといっても，$\hat{q}(t)$ の運動は，右辺の $\hat{b}_\alpha\,(\equiv \hat{b}_\alpha(t_0))$ を通じて環境の初期状態に依存する．

以上は一般的すぎていささか分かりにくいかもしれない．以下，共通一次模型 (5.1.14) に話を限ろう．すると

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{q}(t) + \tilde{V}'(\hat{q}(t)) - \int_{t_0}^{t} dt' [f'(\hat{q}(t)) \phi(t-t') f(\hat{q}(t'))]_+$$
$$= [\hat{\mathcal{R}}(t) f'(\hat{q}(t))]_+ \; , \tag{5.2.13}$$

$$\phi(t) := \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha^2 \sin\omega_\alpha t \; , \tag{5.2.14}$$

$$\hat{\mathcal{R}}(t) := \sqrt{\frac{h}{2}} \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha (e^{-i(t-t_0)\omega_\alpha}\hat{b}_\alpha + \text{h.c.}) \; , \tag{5.2.15}$$

$$\bar{\gamma}_\alpha \equiv \gamma_\alpha \omega_\alpha^{3/2} \; . \tag{5.2.16}$$

式 (5.2.13) の各項の意味は明らかであろう．仮に環境振動子が巨視系と独立に振動しているとすれば，環境から巨視系に対し，同式右辺で与えられる力が働く（環境振動子の初期状態が低励起状態に限られるならば，その大きさは $\mathcal{O}(h^{1/2})$ である）．実際には環境振動子に対して巨視系が力を及ぼし，それに応

じて環境振動子の位置が自由振動の場合からずれる．その結果，環境から巨視系に対して働く力も変わる．この変化分が左辺第3項であり，その大きさは $\mathcal{O}(\hbar^0)$ である．環境振動子 α が外力に応じて位置を変えるには ω_α^{-1} 程度の時間を要する．それゆえ，巨視系が環境振動子に力を及ぼしたことの影響は，同程度の時間だけ遅れて巨視系自身に跳ね返ってくる（**遅延反作用**）というわけである．環境振動子全部を考慮した際の遅延反作用が函数 $\phi(t-t')$ によって定量的に表されている．

5.3 環境周波数分布函数

環境振動子の周波数 $\{\omega_\alpha\}$ を大きさの順に番号付けておく．

$$0<\omega_1<\omega_2<\cdots<\omega_N\equiv\omega_{\max}\ . \qquad (5.3.1)$$

そして，次式を満たす滑らかな函数 $\bar{\gamma}(\omega)$ を導入する．

$$\bar{\gamma}(\omega_\alpha)=\bar{\gamma}_\alpha\ . \qquad (5.3.2)$$

$\omega_{\max}$ は固定されているとして N が非常に大きい場合を想定すれば，式 (5.2.14) の和は積分で近似できよう．和より積分の方が扱いやすいから，これは好都合である．ただし ω_α が等間隔に並んでいるとは限らないので，和記号を単純に積分記号で置き換えることはできない．和から積分に移る議論を見通しよくすべく，函数 $J(\omega)$ を次式によって定義する．

$$J(\omega):=\frac{\pi}{2}\sum_\alpha\bar{\gamma}_\alpha^2\delta(\omega-\omega_\alpha)\ . \qquad (5.3.3)$$

すなわち

$$J(\omega)=\frac{\pi}{2}\{\bar{\gamma}(\omega)\}^2D(\omega),\quad D(\omega):=\sum_\alpha\delta(\omega-\omega_\alpha)\ . \qquad (5.3.4)$$

函数 $D(\omega)$ は環境振動子の周波数分布を表し，$J(\omega)$ は，それに相互作用強度 $\{\bar{\gamma}(\omega)\}^2$ で重みを付けた分布を表す．後者を**環境周波数分布函数**と略称する．

環境を特徴付ける特性周波数 ν_{c}，ω_{c} が存在し，次の不等式を満たすものとする．

$$\nu_{\mathrm{c}}\ll\omega_0\ll\omega_{\mathrm{c}}\ . \qquad (5.3.5)$$

ω_0 は $V(q)$ の井戸の特性周波数（図 2.1）である．そして，$J(\omega)$ はおよそ次のよ

うな性質を持つとする(図 5.2).

$$J(\omega) \sim \begin{cases} 0 & : \omega \gtrsim \omega_c \,, \\ \eta\omega^s & : \nu_c \ll \omega \lesssim \omega_c \,, \\ \eta'(\omega-\nu_c)^{\sigma-1} & : \omega \gtrsim \nu_c \,, \\ 0 & : \omega < \nu_c \,. \end{cases} \tag{5.3.6}$$

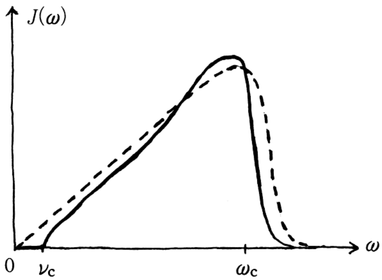


図 5.2　環境周波数分布函数(破線は Ohm 型環境の場合)

η, η' は環境と巨視系の相互作用の強さの目安を与える正定数である．正の指数 s, σ は環境ごとに異なる．もし環境として固体中の<u>音子</u>(phonon) を考えたとし，仮に $\tilde{\gamma}(\omega)$ が定数ならば $\nu_c = 0$, $\omega_c \sim$ Debye 周波数となろう．また超伝導体中の Bogoliubov 準粒子ならば $\sigma = 1/2$, $\nu_c \sim \Delta_s/h$ (Δ_s は超伝導秩序場の大きさ) などとなろう．このような $J(\omega)$ で特徴付けられる環境は，特に $\nu_c = 0$ の場合，s の値に応じて以下のように名付けられている．

$0 < s < 1$: <u>亜 Ohm 型環境</u> (sub-ohmic environment) ,

$s = 1$: <u>**Ohm 型環境**</u> (ohmic environment) ,

$s > 1$: <u>超 Ohm 型環境</u> (super-ohmic environment) .

具体的計算に際しては例えば次式を採用するとよかろう．

$$J(\omega) \;=\; \eta\omega\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{s-1}\left(1-\frac{\nu_c}{\omega}\right)^{\sigma-1}\exp(-\omega/\omega_c)\theta(\omega-\nu_c) \,. \tag{5.3.7}$$

5.4 遅延抵抗函数

後のため，次の函数を導入する．

$$\mathcal{T}(t) := \sum_{\alpha} \bar{\gamma}_{\alpha}^{2} \omega_{\alpha}^{-1} \cos \omega_{\alpha} t \ . \tag{5.4.1}$$

これを**遅延抵抗函数**と呼ぶ(次節参照)．$\phi(t)$ との関係は

$$\phi(t) = -\frac{d\mathcal{T}(t)}{dt} \ . \tag{5.4.2}$$

環境周波数分布函数 (5.3.3) を用いれば

$$\phi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega J(\omega) \sin \omega t \ , \tag{5.4.3}$$

$$\mathcal{T}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} J(\omega) \cos \omega t \ . \tag{5.4.4}$$

条件 (5.3.6) のもとで，$\mathcal{T}(t)$ の一般的性質を調べておこう．まず，すぐに分かることは

$$\mathcal{T}(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{J(\omega)}{\omega} < \infty \ , \tag{5.4.5}$$

$$\mathcal{T}(\infty) = 0 \ , \tag{5.4.6}$$

$$\int_0^{\infty} dt\ \mathcal{T}(t) = \left. \frac{J(\omega)}{\omega} \right|_{\omega \downarrow 0} = \begin{cases} \eta & : \ s=1,\ \nu_{\mathrm{c}}=0 \ , \\ 0 & : \ s>1 \ \text{または}\ \nu_{\mathrm{c}}>0 \ , \\ \infty & : \ 0<s<1 \ ,\ \nu_{\mathrm{c}}=0 \ . \end{cases} \tag{5.4.7}$$

模型 (5.3.7) を用いて，例えば $s=1$ と $s=2$ の場合に具体的に計算してみると

$$\mathcal{T}(t) = \frac{2\eta\omega_{\mathrm{c}}}{\pi} I_s(\omega_{\mathrm{c}} t; \nu_{\mathrm{c}}/\omega_{\mathrm{c}}) \ , \tag{5.4.8}$$

$$I_s(\tau;\epsilon) = \begin{cases} e^{-\epsilon}\left(\dfrac{1}{1+\tau^2} \cos \epsilon\tau - \dfrac{\tau}{1+\tau^2} \sin \epsilon\tau \right) & : \ s=1 \ , \\ e^{-\epsilon} \dfrac{(1-\tau^2)\cos \epsilon\tau - 2\tau \sin \epsilon\tau}{(1+\tau^2)^2} + \epsilon I_1(\tau;\epsilon) & : \ s=2 \ . \end{cases}$$

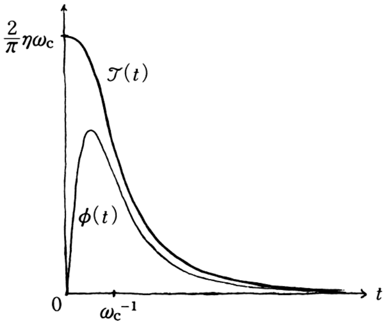


図 5.3　函数 $\phi(t)$ と遅延抵抗函数 $\mathcal{T}(t)$（Ohm 型環境の場合）

ただし簡単のため $\sigma=1$ とした．関係 (5.4.2) から $\phi(t)$ もすぐに求められる．これを図 5.3 に示す．

遅延抵抗函数 $\mathcal{T}(t)$ は，その元来の定義式 (5.4.1) によれば，近似的に周期性を持つ．これは第 2.5 節で議論した和 (2.5.3) の場合と同じ状況である．したがって，式 (5.4.6) は字義通りには正しくない．しかし，$\omega_{\max}$ を固定して N を増していくと，ω_α の比が単純な有理数という特殊な場合を除けば，$\mathcal{T}(t)$ の Poincaré 周期 τ_P は急激に大きくなる[*5]．ゆえに，現実的問題において考えるべき時間 t は常に

$$t \ll \tau_P \tag{5.4.9}$$

を満たす．式 (5.4.6) における ∞ とは，この条件を満たすけれども ω_c^{-1} に比べれば非常に長い時間という意味である．実は，式 (5.4.1) の和を積分で置き換えるにあたって条件 (5.4.9) よりも強い条件

$$\max_\alpha\{(\omega_{\alpha+1}-\omega_\alpha)t\} \ll 1 \tag{5.4.10}$$

を仮定した．$\omega_{\alpha+1}-\omega_\alpha$ が微小量であっても，この条件が満たされないと一般に $|\sin(\omega_{\alpha+1}t)-\sin(\omega_\alpha t)|$ は微小量にならない．不等式 (5.4.10) の範囲の時間を<u>通常時間</u>と呼ぶ．以上を言い換えれば，<u>通常時間</u>に話を限るという了解のもとで $J(\omega)$ を ω の連続函数とみなすことが許される．また，巨視系と環境の相互作用の詳細[*6] が異なっても $J(\omega)$ が同じであれば，<u>通常時間</u>に関する限り，

---

*5　現宇宙年齢を越えるのも容易．

*6　すなわち $\{(\omega_\alpha,\gamma_\alpha) \mid \alpha=1,2,\cdots,N\}$

環境の効果は同じである．

5.5 Heisenberg 運動方程式，その 2

本論に戻って (5.2.13) に (5.4.2) を代入すると

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{q}(t)+\tilde{V}'(\hat{q}(t))+\hat{\mathcal{M}}(t)=[\hat{\mathcal{R}}(t)f'(\hat{q}(t))]_+ \ , \tag{5.5.1}$$

$$\hat{\mathcal{M}}(t):=\int_{t_0}^{t}dt'\left[f'(\hat{q}(t))\frac{d}{dt}\mathcal{T}(t-t')f(\hat{q}(t'))\right]_+ . \tag{5.5.2}$$

なぜ ϕ を $\mathcal{T}$ に書き換えたか，それは，後者を使うと，次節で述べるように Markov 近似が可能になるからである（ϕ と $\mathcal{T}$ の比較：図 5.3 参照）．$\hat{\mathcal{M}}$ は**記憶項**（memory term：過去の履歴よにる項）であり，次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}}(t)&=-\int_{t_0}^{t}dt'\left[f'(\hat{q}(t))\left(\frac{d}{dt'}\mathcal{T}(t-t')\right)f(\hat{q}(t'))\right]_+\\&=\mathcal{V}'_{\rm ren}(\hat{q}(t))+[f'(\hat{q}(t))\mathcal{T}(t-t_0)f(\hat{q}(t_0))]_+\\&\quad+\int_{t_0}^{t}dt'\left[f'(\hat{q}(t))\mathcal{T}(t-t')\frac{df(\hat{q}(t'))}{dt'}\right]_+ ,\end{aligned} \tag{5.5.3}$$

$$\mathcal{V}_{\rm ren}(q)\equiv-\frac{1}{2}\mathcal{T}(0)\{f(q)\}^2 \ . \tag{5.5.4}$$

ところが

$$\tilde{V}(q)-V(q)=\frac{1}{2}\sum_\alpha\omega_\alpha^2\{f_\alpha(q)\}^2=\frac{1}{2}\sum_\alpha\bar{\gamma}_\alpha^2\omega_\alpha^{-1}\{f(q)\}^2=\frac{1}{2}\mathcal{T}(0)\{f(q)\}^2. \tag{5.5.5}$$

ゆえに (5.5.4) と (5.5.5) は互いに打ち消し合う（この点に関しては次節最後に詳述）．したがって

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\hat{q}(t)}{dt^2}+V'(\hat{q}(t))+\left[f'(\hat{q}(t))\int_{t_0}^{t}dt'\mathcal{T}(t-t')\frac{df(\hat{q}(t'))}{dt'}\right]_+\\&=\left[f'(\hat{q}(t))\hat{\hat{\mathcal{R}}}(t)\right]_+ ,\end{aligned} \tag{5.5.6}$$

$$\hat{\tilde{\mathcal{R}}}(t) := \hat{\mathcal{R}}(t) - \mathcal{T}(t-t_0) f(\hat{q}) \tag{5.5.7}$$

$$= \sqrt{\frac{h}{2}} \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha \{ e^{-i(t-t_0)\omega_\alpha} \hat{b}_\alpha + \text{h.c.} \} \tag{5.5.8}$$

$$- \sum_\alpha \frac{\bar{\gamma}_\alpha^2}{\omega_\alpha} \cos((t-t_0)\omega_\alpha) f(\hat{q}) \tag{5.5.9}$$

$$= \sqrt{\frac{h}{2}} \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha \left[e^{-i(t-t_0)\omega_\alpha} \left\{ \hat{b}_\alpha - \sqrt{\frac{\omega_\alpha}{2h}} f_\alpha(\hat{q}) \right\} + \text{h.c.} \right]. \tag{5.5.10}$$

最後の中括弧内には $\hat{H}_{\mathcal{E}} + \hat{H}_{\mathcal{SE}}$ に出てきたのと同じ組み合わせが現れている．

以下，双一次模型 $(f(q)=q)$ に話を限れば，

$$\frac{d^2\hat{q}(t)}{dt^2} + V'(\hat{q}(t)) + \int_{t_0}^{t} dt' \mathcal{T}(t-t') \frac{d\hat{q}(t')}{dt'} = \hat{\tilde{\mathcal{R}}}(t) \ . \tag{5.5.11}$$

この形の方程式は**量子 Langevin 方程式**[*7] と呼ばれる．$\hat{q}$ を c 数で置き換えれば古典的な Langevin 方程式になるからである．左辺第 3 項は“時間的な遅れをもつ摩擦抵抗の存在”を意味する．その遅れを表すのが函数 $\mathcal{T}(t)$ であるから，これを古典論にならって遅延抵抗函数と呼んだわけである．また，初期値のみに依存する右辺（の揺らぎ部分）は揺動力を表すと解釈できる．

なお，上式は $\hat{q}(t)$ に関する微積分方程式であるが，望みとあらば微分方程式に書き直すこともできる．そうすると遅延効果は表面に出てこない．もちろん，物理的効果としての遅延効果がなくなったわけではなく，積分項の消えた皺寄せとして，微分方程式の係数があらわに時間に依存し，右辺の揺動力も変更を受け複雑になる．この書き直しは一般には面倒であるが，巨視系も調和振動子 $(V(q) \propto q^2)$ という特殊な場合には比較的容易である．

5.6　古典領域における運動方程式

全系の初期状態を $|\Psi(0)\rangle\rangle$ として，それに関する期待値を $\langle \cdots \rangle$ で表す．運動方程式 (5.5.11) の期待値をとり，

*7　Langevin 方程式という呼称は“時間遅れを伴わない Langevin 方程式”に限定して使われることもある．その場合には，上式は“拡張された Langevin 方程式”と呼ばれる．例えば，久保亮五：Brown 運動 (戸田盛和・久保亮五編集：統計物理学，岩波書店 (1978)，第 5 章，p. 220.)

$$q(t) := \langle \hat{q}(t) \rangle \equiv \langle\langle \Psi(0)|\hat{q}(t)|\Psi(0)\rangle\rangle \tag{5.6.1}$$

と置けば

$$\ddot{q}(t) + \langle V'(\hat{q}(t))\rangle + \tilde{\mathcal{M}}(t) = \langle \hat{\tilde{\mathcal{R}}}(t)\rangle \ , \tag{5.6.2}$$

$$\tilde{\mathcal{M}}(t) := \int_{t_0}^{t} dt' \mathcal{T}(t-t')\dot{q}(t') = \int_{-(t-t_0)}^{0} dt' \mathcal{T}(t')\dot{q}(t+t') \ . \tag{5.6.3}$$

さて巨視系の運動を特徴付ける時間尺度 ω_0^{-1} が ν_c^{-1} と ω_c^{-1} の間にあるという状況下(式 (5.3.5))では，$\tilde{\mathcal{M}}(t)$ の被積分函数は図 5.4 のようになる．そこで，時

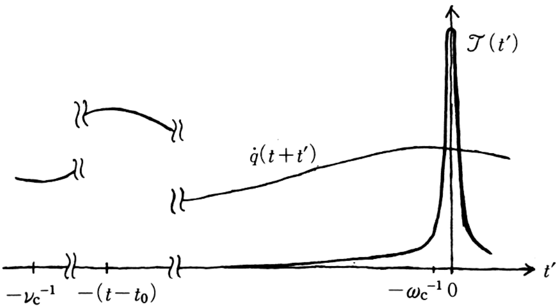


図 5.4　$\tilde{\mathcal{M}}(t)$ の被積分函数

間域

$$\omega_c^{-1} \ll t - t_0 \ll \nu_c^{-1} \tag{5.6.4}$$

に着目すれば

$$\tilde{\mathcal{M}}(t) \simeq \dot{q}(t) \int_{-(t-t_0)}^{0} dt' \mathcal{T}(t') \simeq \eta \dot{q}(t) \ . \tag{5.6.5}$$

つまり **Markov 近似**が成り立つ．最後の等式は，Ohm 型環境の場合に (5.4.7) から得られる．同じ時間域において

$$\hat{\tilde{\mathcal{R}}}(t) \simeq \hat{\mathcal{R}}(t) \ . \tag{5.6.6}$$

もし，巨視系の波束がポテンシャルの変化 (q 依存性) の尺度に比べて充分に局在しているならば

$$\langle V'(\hat{q}(t))\rangle \simeq V'(q(t)) \ , \tag{5.6.7}$$

$$\ddot{q}(t) + \eta\dot{q}(t) + V'(q(t)) \simeq \langle \hat{\mathcal{R}}(t)\rangle \ . \tag{5.6.8}$$

つまり η は通常の摩擦係数であることが分かる．環境が Ohm 型の場合に限り，

この形の方程式が得られる．

特に右辺が 0 となる状況を考えれば，巨視系エネルギー

$$E(t) := \frac{1}{2}\{\dot{q}(t)\}^2 + V(q(t)) \tag{5.6.9}$$

は

$$\dot{E}(t) = -\eta\{\dot{q}(t)\}^2 \tag{5.6.10}$$

に従って減衰する．さらに，巨視系が調和振動子で近似でき（$V(q) \simeq \omega_0^2 q^2/2$）かつ $\eta \ll \omega_0$ の場合には，ヴィリアル定理を用いて

$$\frac{d}{dt}\overline{E(t)} \simeq -\eta\overline{E(t)}\ , \tag{5.6.11}$$

$$\overline{E(t)} \simeq \overline{E(0)}e^{-\eta t}\ . \tag{5.6.12}$$

ただし上線は一周期にわたる平均を表す．つまり巨視系エネルギーは平均的に特性時間 η^{-1} で減衰する．

不可逆過程を記述する式 (5.6.8) が，可逆な (つまり時間反転対称性を持つ)Schrödinger 方程式から導かれたのは逆理ではない．ここにいう不可逆過程（すなわち摩擦に代表される通常の不可逆過程）は，全系の状態が一方的な時間変化をするということではなく，例えば巨視系エネルギーが環境に向かって一方的に流れ出す，ということに過ぎない．流れ出したエネルギーが再び巨視系に戻るには τ_{P} 程度の時間がかかる．通常時間に話を限れば，そのようなことは起こらないというだけである．式 (5.6.8) を導くにあたり，ある初期時刻 t_0 を設定して $t > t_0$ とした．逆に $t < t_0$ として議論を繰り返したとすれば，**遅延解** (5.2.9) を**先進解**で置き換えることになり，その結果，式 (5.6.8) にて η の前の符号を逆にした式が得られる．基礎方程式が時間反転に関して対称とは，“勝手な解を時間反転したものもまた解” ということである．先進解は遅延解の時間反転に他ならない．よって，式 (5.6.8) は時間反転対称性と矛盾しない．これらは量子力学・古典力学を問わず極めて一般的なことがらである．

一般に，巨視系ポテンシャル $V(q)$ を理論的に決定するのは容易でない．したがって，巨視的トンネル現象探索においては以下の手順に頼ることになる．

（1）$V(q)$ として，そのおよその形を見当付け，少数個の定数を含む函数を仮定する．

(2) 巨視系を，式 (5.6.8) が成り立つと思われる古典的状況に置き，その挙動を観察する．結果を式 (5.6.8) と比較することにより，定数 η および $V(q)$ に含まれる定数を実験的に決定する．

(3) こうして得られた η と $V(q)$ を用いて，当該の巨視系におけるトンネル現象を理論的に解析する．

(4) 巨視系を，トンネル現象の起こり得る状況[*8]に置き，その挙動を観察する．結果を前項の理論的推測と比較する．もし一致すれば，巨視的トンネル現象検出の証拠となる．

全 Hamiltonian を (5.1.8)–(5.1.11) のように仕分けした理由はここにある．実験的に決定できる可能性があるのは (5.1.9) に書いた $V(q)$ であって，それに (5.1.11) の第 2 項(すなわち (5.5.5)) を加えたものではない．しばしば，(5.5.5) は打消項(counter term) と呼ばれ，これと (5.5.4) が相殺することがポテンシャル繰込 (potential renormalization) と呼ばれる．CT とか PR とかいうと何となく高尚かつ抽象的に聞こえ，“Hamiltonian に打消項を付けるべきや否や” と悩むようなことになりかねないが，いま述べた通り，かような悩みは無用である．

なお，式 (5.6.8) の第 2 項は，条件 (5.3.5) の下で ω_c の値によらず得られる．つまり，摩擦を与えるのは環境振動子の低周波数部分 ($\omega_\alpha \lesssim \omega_0$) であって，高周波数部分 ($\omega_\alpha \gg \omega_0$) は上述のポテンシャル繰込のみに寄与する(実際，条件 (5.3.5) の下で (5.5.4) の値を支配するのは高周波数部分である)．

巨視系の多くは，古典的状況に置かれた際，通常の摩擦を伴う運動をする．つまり方程式 (5.6.8) に従うと考えられる．それゆえ，環境の詳細は個々の系によって大いに異なろうとも，環境が Ohm 型であることは相当に一般的と考えられる．

---

*8 つまり量子力学的状況(といっても準古典的状況 (2.1.11) であるが)．

演習問題

5.1 式 (5.2.9) を用いて交換関係 (5.2.10) を確かめよ.

5.2 $J(\omega)$ が (5.3.7) で与えられるとして，遅延抵抗函数の振る舞いを詳しく調べよ.

5.3 巨視系が調和振動子の場合に，(5.6.10) を解いて，結果を (5.6.12) と比べよ.

5.4 $\hat{q}(t)$ の揺らぎ

$$\sigma(t) := \langle\{\hat{q}(t)\}^2\rangle - \{\langle\hat{q}(t)\rangle\}^2 \tag{5.6.13}$$

の従う方程式を導け．ただし $\langle\cdots\rangle$ は第 5.6 節と同じく全系の初期状態に関する期待値を表す.

5.5 **揺動力** (random force)

$$\delta\hat{\mathcal{R}}(t) := \hat{\mathcal{R}}(t) - \langle\hat{\mathcal{R}}(t)\rangle \tag{5.6.14}$$

の性質を典型的な初期状態について調べよ（記法は第 5.6 節に同じ）．特に

$$\langle\hat{b}_\alpha\rangle = 0, \quad \langle\hat{b}_\alpha^\dagger\hat{b}_\beta\rangle = n(\omega_\alpha)\delta_{\alpha\beta}\ , \quad \langle\hat{b}_\alpha\hat{b}_\beta\rangle = s(\omega_\alpha)\delta_{\alpha\beta}\ , \tag{5.6.15}$$
$$n(\omega), s(\omega) \text{ は所与の函数}$$

の場合に次式を示せ.

$$\langle[\hat{\mathcal{R}}(t)\hat{\mathcal{R}}(t')]_+\rangle$$
$$= \frac{2h}{\pi}\int_0^\infty d\omega J(\omega)\left[\left\{n(\omega)+\frac{1}{2}\right\}\cos((t-t')\omega) + \Re\left\{s(\omega)e^{-i(t+t'-2t_0)\omega}\right\}\right]\ . \tag{5.6.16}$$

これは**揺動力の（対称化された）時間相関函数**と呼ばれる（**雑音** (noise) と略称）．例えば環境振動子の初期状態が**拉状態**[*9](squeezed state) の場合にこの式が使える. $s(\omega_\alpha)$ が振動子 α の拉ぎ(squeezing) の度合いを表し，それに応じて雑音は定常でない．しかし,

$$\int_0^\infty d\omega J(\omega)|s(\omega)| < \infty \tag{5.6.17}$$

と仮定すれば，$s(\omega)$ に比例する項は $t_0 \downarrow -\infty$ で 0 となる．つまり，拉ぎに起因する非定常性は過渡的なものである.

---

*9 ひしぎじょうたい

もし

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{h\omega/T_\star} - 1} \qquad (5.6.18)$$

ならば

$$\langle [\hat{\mathcal{R}}(t)\hat{\mathcal{R}}(t')]_+ \rangle|_{t_0\downarrow -\infty} \simeq \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega \frac{J(\omega)}{\omega}\mathcal{E}(\omega;T_\star)\cos((t-t')\omega) \ , \qquad (5.6.19)$$

$$\mathcal{E}(\omega;T_\star) := \frac{h\omega}{e^{h\omega/T_\star}-1} + \frac{1}{2}h\omega = \frac{h\omega}{2}\coth\frac{h\omega}{2T_\star} \ . \qquad (5.6.20)$$

$T_\star$ は環境の有効温度である（星の温度の決め方と同じ）．この雑音の $t-t'$ 依存性を調べよ．

各環境振動子の初期状態がコヒーレント状態の場合についても論ぜよ．

6 調和環境中の量子共鳴振動

前節では，巨視系が古典的な運動をする状況を考え，それに対する調和環境の効果を調べた．結果を一口で言えば，典型的な調和環境は摩擦として働くということであった．それでは，環境から切り離された場合の巨視系の運動が量子論的であるような状況を考えたら，巨視系の運動は調和環境からどのような影響を受けるであろうか．本章では，MQC 状況におかれた巨視系に対する調和環境の効果を論ずる．

本書の主眼は，環境の存在にもかかわらず(つまり環境による干渉性消失効果に打ち克って)巨視的量子現象が実現され得るか，その可能性を探ることにある．したがって，環境との相互作用が弱い(正確な意味は後述)場合に興味がある[*1]．そのような場合には，環境の効果を摂動論で扱うことができるであろう．以下，摂動論に基づいて位相攪乱効果と散逸効果の詳細を調べる．

6.1 摂動論に関する予備的考察

まず，通常の初等的摂動論のおさらいをしておこう．環境のエネルギー固有状態と，それに対応するエネルギー固有値を一般的に $|\star\rangle$, $\varepsilon_\star$ と書き，特に基底状態を $|\mathrm{vac}\rangle$ と書く．

$$\hat{H}_{\mathcal{E}}|\star\rangle = \varepsilon_\star|\star\rangle\ , \quad \hat{H}_{\mathcal{E}}|\mathrm{vac}\rangle = 0\ . \tag{6.1.1}$$

---

*1 これに対し，“通常の巨視系が，量子力学に支配されているにもかかわらず，古典的振る舞いをするのはなぜか” という問題を主眼に据えるならば，量子的振る舞いの片鱗が残らずかき消されてしまうほど環境との相互作用が強い場合を論ずることになる．

また，環境振動子が 1 個あるいは 2 個だけ励起された状態を $|\alpha\rangle$, $|\alpha\beta\rangle$ などと書く*2.

$$|\alpha\rangle := \hat{b}_\alpha^\dagger|\mathrm{vac}\rangle\ , \quad |\alpha\beta\rangle := \hat{b}_\alpha^\dagger \hat{b}_\beta^\dagger|\mathrm{vac}\rangle\ . \tag{6.1.2}$$

巨視系 Hamiltonian $\hat{H}_{\mathcal{S}}$ の固有状態と固有値については第 4.2 節の記法に従う．同節と同じく，全系の状態を

$$|n,\star\rangle\rangle \equiv |n\rangle|\star\rangle \tag{6.1.3}$$

などと表す．したがって例えば $|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle$ は

$$\hat{H}_0 := \hat{H}_{\mathcal{S}} + \hat{H}_{\mathcal{E}} \tag{6.1.4}$$

の固有状態であり，対応するエネルギー固有値は E_n である(図 6.1 参照)．摂

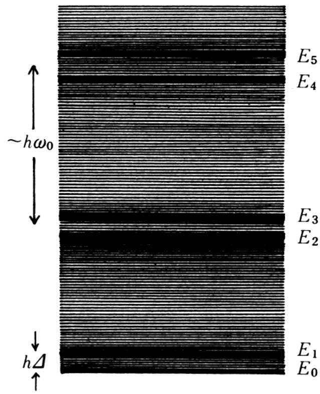


図 6.1　$\hat{H}_0$ のエネルギー準位

動 $\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}$ が加わったことによる，このエネルギー固有値の変化高を δE_n とすれば，定常状態に対する摂動論により，

$$\delta E_n \simeq \delta E_n^{(1)} + \sum_{m,\star}{}' \frac{|\langle\langle m,\star|\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle|^2}{E_n - (E_m + \varepsilon_\star)}. \tag{6.1.5}$$

ただし

$$\delta E_n^{(1)} := \langle\langle n,\mathrm{vac}|\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle \tag{6.1.6}$$

は 1 次摂動による変化分である．近似等号 $\simeq$ は，2 次摂動まで考慮したことを

*2　$\alpha=\beta$ の場合，$|\alpha\beta\rangle$ は 1 に規格化されていない．

示す．また，第2項の和に $'$ を付けたのは，$(m,\star)=(n,\mathrm{vac})$ を除くという意味である．定常状態に対する摂動論を無批判に援用したが，摂動の効果によってエネルギーが $E_n+\delta E_n$ にずれた "状態" は，実は定常状態ではなく，有限の "寿命" Γ_n^{-1} をもつ．Fermi の黄金律によれば

$$\Gamma_n \simeq \frac{2\pi}{h}\sum_{m,\star}{}' \left|\langle\langle m,\star\,|\hat{H}_{\mathcal{SE}}|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle\right|^2 \delta(E_n-(E_m+\varepsilon_\star)) \ . \qquad (6.1.7)$$

式 (6.1.5) と (6.1.7) をまとめて，

$$\delta E_n-\delta E_n^{(1)}-\frac{1}{2}ih\Gamma_n \simeq \sum_{m,\star}{}' \frac{|\langle\langle m,\star\,|\hat{H}_{\mathcal{SE}}|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle|^2}{E_n-(E_m+\varepsilon_\star)+i0} \ . \qquad (6.1.8)$$

ただし，$+0$ は無限小の正実数を表す．ここで

$$\hat{H}' := \hat{H}_{\mathcal{SE}}-|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle\delta E_n^{(1)}\langle\langle n,\mathrm{vac}| \qquad (6.1.9)$$

と置けば

$$\langle\langle n,\mathrm{vac}|\hat{H}'|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle = 0 \ . \qquad (6.1.10)$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\delta E_n-\delta E_n^{(1)}-\frac{1}{2}ih\Gamma_n \\
&\simeq \sum_{m,\star}\langle\langle n,\mathrm{vac}|\hat{H}'|m,\star\rangle\rangle \frac{1}{E_n-(E_m+\varepsilon_\star)+i0}\langle\langle m,\star\,|\hat{H}'|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle \qquad (6.1.11) \\
&= \langle\langle n,\mathrm{vac}|\hat{H}'\frac{1}{E_n-\hat{H}_0+i0}\hat{H}'|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle \ . \qquad (6.1.12)
\end{aligned}$$

この最後の表式は簡潔にして要を得ているものの形式的であり，その値を具体的に計算しようとすると (6.1.11) に戻ることになる．

以上は，しばしばお目にかかる式変形であるが，いささか疑問が残る．式 (6.1.7) に現れるデルタ函数が意味を成すためには，$\star$ についての和を積分で置き換えることが可能でなければならない．これに伴い，式 (6.1.5) の和も積分で置き換えられる．よく知られているように，式 (6.1.8) が導かれるのは，式 (6.1.5) の代役をする積分が主値積分の場合である．ところが，式 (6.1.5) を見ても，それを主値積分と解すべき理由は見当たらない．実は，式 (6.1.12) の合理的導出は，上述のような，定常状態のエネルギーに対する摂動論を Fermi

黄金律と組み合わせる議論によっては不可能であって，時間発展の摂動論を用いて初めて可能である．これについては後で述べることとし，差し当たり，式 (6.1.12) をもって $\delta E_n-\delta E_n^{(1)}-\dfrac{1}{2}ih\Gamma_n$ の定義とする．もちろん，これは $\hat{H}_{S\mathcal{E}}$ に関して 2 次までの範囲で妥当な定義である．

記号の簡略化のため

$$\hat{f}_\alpha := \omega_\alpha^{3/2} f_\alpha(\hat{q}) \ , \quad \Omega_{nm} := (E_n-E_m)/h \qquad (6.1.13)$$

とおき，$\hat{b}_\alpha|\mathrm{vac}\rangle=0$ を用いれば

$$\delta E_n^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{1}{\omega_\alpha}\langle n|\hat{f}_\alpha^2|n\rangle. \qquad (6.1.14)$$

式 (6.1.12) の右辺を $\hat{f}_\alpha$ に関して 2 次までの精度で計算しよう．$\hat{H}'$ に含まれる 2 次の項は高々 3 次の寄与しかしないので無視してよい．したがって，同式においては実効的に

$$\hat{H}'|n,\mathrm{vac}\rangle\rangle \simeq -\sqrt{\frac{h}{2}}\sum_\alpha \hat{f}_\alpha|n,\alpha\rangle\rangle \ . \qquad (6.1.15)$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
\delta E_n - \delta E_n^{(1)} - \frac{1}{2}ih\Gamma_n &\simeq \frac{h}{2}\sum_{\alpha,\beta}\langle\langle n,\alpha|\hat{f}_\alpha\frac{1}{E_n-\hat{H}_0+i0}\hat{f}_\beta|n,\beta\rangle\rangle \\
&= \frac{h}{2}\sum_{m,\alpha}\langle n|\hat{f}_\alpha|m\rangle\frac{1}{E_n-(E_m+h\omega_\alpha)+i0}\langle m|\hat{f}_\alpha|n\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m,\alpha}|\langle m|\hat{f}_\alpha|n\rangle|^2\left\{\frac{1}{\Omega_{nm}-\omega_\alpha+i0}+\frac{1}{\omega_\alpha}\right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{m,\alpha}\frac{|\langle m|\hat{f}_\alpha|n\rangle|^2}{\omega_\alpha} \ . \qquad (6.1.16)
\end{aligned}$$

最後の等式は，和の各項に ω_α^{-1} を加え，かつ引いて得たにすぎない．こうしておくと，右辺第 1 項の α 和において，環境調和振動子のうち高周波振動子の主要な寄与が打ち消し合う*3．また，右辺第 2 項の m 和を実行すれば式 (6.1.14) に一致する．したがって

*3 $\omega_\alpha \gg |\Omega_{nm}|$ の場合，中括弧内の主要項は $-\omega_\alpha^{-1}+\omega_\alpha^{-1}$．

$$\delta E_n - \frac{1}{2} i\hbar\Gamma_n \simeq \frac{1}{2}\sum_{m,\alpha}\frac{|\langle m|\hat{f}_\alpha|n\rangle|^2}{\omega_\alpha}\frac{\Omega_{nm}}{\Omega_{nm}-\omega_\alpha+i0} \ . \quad (6.1.17)$$

以下，共通一次模型 (5.1.14) に話を限る．記号

$$f_{mn} := \langle m|f(\hat{q})|n\rangle \quad (6.1.18)$$

と環境周波数分布函数 (5.3.3) を用いて式 (6.1.17) を書き直せば

$$\delta E_n - \frac{1}{2} i\hbar\Gamma_n = \frac{1}{\pi}\sum_m |f_{mn}|^2 \Omega_{nm}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}\frac{J(\omega)}{\Omega_{nm}-\omega+i0} \ . \quad (6.1.19)$$

すなわち

$$\delta E_n = \frac{1}{\pi}\sum_m |f_{mn}|^2 \Omega_{mn}\mathcal{P}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega}\frac{J(\omega)}{\omega+\Omega_{mn}} \ , \quad (6.1.20)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_n &= \frac{2}{\hbar}\sum_m |f_{mn}|^2 \Omega_{nm}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} J(\omega)\delta(\Omega_{nm}-\omega) \\ &= \frac{2}{\hbar}\sum_m |f_{mn}|^2 J(\Omega_{nm})\theta(\Omega_{nm}) \ . \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

式 (6.1.20) の積分記号につけた $\mathcal{P}$ は主値積分を表し，式 (6.1.21) の $\theta(\Omega_{nm})$ は踏段函数である．後者は，第 n 励起状態にあった巨視的系は $n-1$ 以下の準位にしか遷移できないことを示す．つまり Γ_n は散逸効果を反映する．特に

$$\Gamma_0 = 0 \ . \quad (6.1.22)$$

さて，δE_n と Γ_n が計算できたとして，MQC について何が結論されるであろうか．以下，第 4.2 節で設定した問題を考え，全系の初期状態を

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |-, \mathrm{vac}\rangle\rangle \quad (6.1.23)$$

（つまり式 (4.2.25) にて $|\chi\rangle = |\mathrm{vac}\rangle$）とすると，素朴に期待されるのは次式かもしれない．

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle\rangle &= \{P_0(t)\}^{1/2}|0,\mathrm{vac}\rangle\rangle \exp\{-i(E_0+\delta E_0)t/\hbar\} \\ &\quad - \{P_1(t)\}^{1/2}|1,\mathrm{vac}\rangle\rangle \exp\{-i(E_1+\delta E_1)t/\hbar\} \ . \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

これは (4.2.4) にて $\vartheta_n(t) = 0$ と置いたものと本質的に同じである．相互作用 $\hat{H}_{S\mathcal{E}}$ によって環境調和振動子が励起され得ることを考えれば，式 (6.1.24) が不正確なことは明らかであろう．第 4.3 節などと同じく，環境の状態として $|\mathrm{vac}\rangle$ 以外のものが現れて然るべきである．MQC に対する環境の影響を知るには，δE_n と Γ_n だけでは情報不足であり，全系の時間発展をもっと詳しく知る必要

がある.

6.2　時間発展の摂動論

相互作用描像において

$$\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t) := e^{i\hat{H}_0 t/h}\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}e^{-i\hat{H}_0 t/h}\ ,\quad \hat{q}(t) := e^{i\hat{H}_0 t/h}\hat{q}e^{-i\hat{H}_0 t/h} \tag{6.2.1}$$

とし，時間発展演算子

$$\hat{U}_I(t) := \exp(i\hat{H}_0 t/h)\exp(-i\hat{H}t/h) \tag{6.2.2}$$

を相互作用について 2 次まで摂動展開すると

$$\hat{U}_I(t) \simeq 1 - \frac{i}{h}\int_0^t dt_1 \hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t_1) - \frac{1}{h^2}\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t_2)\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t_1)\ . \tag{6.2.3}$$

全系の初期状態として，(6.1.23) を少しだけ一般化した次の状態を採る.

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |\psi\rangle|\mathrm{vac}\rangle\ . \tag{6.2.4}$$

$|\psi\rangle$ は巨視系の勝手な状態である．まず以下の量を計算する.

$$\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t)|\mathrm{vac}\rangle = |\mathrm{vac}\rangle\langle\mathrm{vac}|\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t)|\mathrm{vac}\rangle + \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t)|\mathrm{vac}\rangle \tag{6.2.5}$$

$$= \delta\hat{V}(t)|\mathrm{vac}\rangle - \sqrt{\frac{h}{2}}\sum_\alpha \hat{f}_\alpha(t)e^{i\omega_\alpha t}|\alpha\rangle\ , \tag{6.2.6}$$

ただし

$$\hat{f}_\alpha(t) := \omega_\alpha^{3/2} f_\alpha(\hat{q}(t)),\quad \delta\hat{V}(t) := \frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\{\hat{f}_\alpha(t)\}^2}{\omega_\alpha}\ . \tag{6.2.7}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t')\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t)|\mathrm{vac}\rangle &\simeq -\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}(t')\sqrt{\frac{h}{2}}\sum_\alpha \hat{f}_\alpha(t)e^{i\omega_\alpha t}|\alpha\rangle \\
&\simeq \frac{h}{2}\sum_\beta \hat{f}_\beta(t')(\hat{b}_\beta e^{-i\omega_\beta t'} + \mathrm{h.c.})\sum_\alpha \hat{f}_\alpha(t)e^{i\omega_\alpha t}|\alpha\rangle \\
&= \frac{h}{2}\Big\{\sum_\alpha \hat{f}_\alpha(t')e^{-i(t'-t)\omega_\alpha}\hat{f}_\alpha(t)|\mathrm{vac}\rangle \\
&\quad + \sum_{\alpha\beta}\hat{f}_\beta(t')e^{i\omega_\beta t' + i\omega_\alpha t}\hat{f}_\alpha(t)|\alpha\beta\rangle\Big\}\ .
\end{aligned} \tag{6.2.8}$$

したがって次の形にまとめることができる．

$$\hat{U}_I(t)|\text{vac}\rangle \simeq \hat{\mathcal{U}}_{\text{vac}}(t)|\text{vac}\rangle + \sum_\alpha \hat{\mathcal{U}}_\alpha(t)|\alpha\rangle + \sum_{\alpha\beta} \hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(t)|\alpha\beta\rangle. \quad (6.2.9)$$

ただし $\hat{\mathcal{U}}_{\text{vac}}(t)$, $\hat{\mathcal{U}}_\alpha(t)$, $\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(t)$ は巨視系 Hilbert 空間 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ 上の演算子であって

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{U}}_{\text{vac}}(t) &:= 1 - \frac{i}{h}\int_0^t dt_1 \delta\hat{V}(t_1) \\ &\quad - \frac{1}{2h}\sum_\alpha \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \hat{f}_\alpha(t_2) e^{-i(t_2 - t_1)\omega_\alpha} \hat{f}_\alpha(t_1)\ , \quad (6.2.10)\end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{U}}_\alpha(t) := \frac{i}{\sqrt{2h}} \int_0^t dt_1 \hat{f}_\alpha(t_1) e^{i\omega_\alpha t_1}\ , \quad (6.2.11)$$

$$\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(t) := -\frac{1}{2h}\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \hat{f}_\beta(t_2) e^{i\omega_\beta t_2 + i\omega_\alpha t_1} \hat{f}_\alpha(t_1)\ . \quad (6.2.12)$$

ここで

$$\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n| \exp\{-i(\hat{H}_\mathcal{S} + \hat{H}_\mathcal{E})t/h\}\hat{U}_I(t)|\Psi(0)\rangle\rangle \quad (6.2.13)$$

を式 (4.2.27) と比べると

$$\begin{aligned}\widetilde{|\chi_n(t)\rangle} &= \langle n|\exp(-i\hat{H}_\mathcal{E} t/h)\hat{U}_I(t)|\Psi(0)\rangle\rangle \\ &= |\text{vac}\rangle\langle n|\hat{\mathcal{U}}_{\text{vac}}(t)|\psi\rangle + \sum_\alpha e^{-i\omega_\alpha t}|\alpha\rangle\langle n|\hat{\mathcal{U}}_\alpha(t)|\psi\rangle \\ &\quad + \sum_{\alpha\beta} e^{-i(\omega_\alpha + \omega_\beta)t}|\alpha\beta\rangle\langle n|\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(t)|\psi\rangle\ . \quad (6.2.14)\end{aligned}$$

かくて，計算は $\hat{\mathcal{U}}_{\text{vac}}(t)$, $\hat{\mathcal{U}}_\alpha(t)$, $\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(t)$ の行列要素の計算に帰着された．

まず $\hat{\mathcal{U}}_{\text{vac}}(t)$ の対角要素を計算すると，

$$\langle n|\hat{\mathcal{U}}_{\text{vac}}(t)|n\rangle = 1 - \frac{i}{h}t\delta E_n^{(1)} + \frac{i}{2h}\sum_{m,\alpha} |\langle m|\hat{f}_\alpha|n\rangle|^2 \int_0^t dt' \frac{1 - e^{-i(\Omega_{mn} + \omega_\alpha)t'}}{\Omega_{mn} + \omega_\alpha}\ . \quad (6.2.15)$$

以下，再び共通一次模型を採用して環境周波数分布函数を用いれば，右辺第 3 項は次の形になる．

$$\frac{\cdot i}{\pi h}\sum_m |f_{mn}|^2 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \int_0^t dt' \frac{1 - e^{-i(\omega + \Omega_{mn})t'}}{\omega + \Omega_{mn}}\ . \quad (6.2.16)$$

分子の因子 $1 - e^{-i(\omega + \Omega_{mn})t'}$ のおかげで，被積分函数は $\omega + \Omega_{mn}$ が 0 になる点で

も正則である．したがって，たとえ Ω_{mn} が負であっても，右辺の ω 積分には全く問題が生じない．ゆえに，ω 積分を主値積分で置き換えても結果は変わらない．主値積分にしておくと，以下のように項別に t 積分できて都合がよい．

$$\langle n|\hat{\mathcal{U}}_{\rm vac}(t)|n\rangle = 1-\frac{i}{h}t\left\{\delta E_n^{(1)}-\frac{1}{\pi}\sum_m|f_{mn}|^2\,\mathcal{P}\int_0^\infty d\omega\frac{J(\omega)}{\omega+\Omega_{mn}}\right\} - \frac{1}{\pi h}\sum_m|f_{mn}|^2\,\mathcal{P}\int_0^\infty d\omega J(\omega)\frac{1-e^{-i(\omega+\Omega_{mn})t}}{(\omega+\Omega_{mn})^2}\ . \tag{6.2.17}$$

右辺第2項の中括弧内は，式(6.1.20)の δE_n に一致する．ゆえに，相互作用について2次までの範囲で正しい表式として，次式を得る．

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{\mathcal{U}}_{\rm vac}(t)|n\rangle &\simeq e^{-it\delta E_n/h}\left\{1-\frac{1}{\pi h}\sum_m|f_{mn}|^2\,\mathcal{P}\int_0^\infty d\omega J(\omega)\frac{1-e^{-i(\omega+\Omega_{mn})t}}{(\omega+\Omega_{mn})^2}\right\}\\ &= e^{-it\delta E_n/h}\left\{1-t\frac{1}{h}\sum_m|f_{mn}|^2\int_0^\infty d\omega J(\omega)\mathcal{D}_2(\omega+\Omega_{mn};t)\right.\\ &\qquad\left.+\ \frac{i}{h}\sum_m|f_{mn}|^2\,\mathcal{P}\int_0^\infty d\omega J(\omega)\mathcal{D}_3(\omega+\Omega_{mn};t)\right\}\ .\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

ただし $\mathcal{D}_2(\omega;t), \mathcal{D}_3(\omega;t)$ はデルタ函数に関連した函数である．

$$\mathcal{D}_2(\omega;t) := \frac{1}{2\pi t}\left\{\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega/2}\right\}^2, \quad \mathcal{D}_3(\omega;t) := -\frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega t}{\omega^2}\ . \tag{6.2.19}$$

ここで注目すべきは，定常摂動論において出自不明瞭であった式(6.1.20)が曖昧さなく出てきたことである．

次に，$\hat{\mathcal{U}}_\alpha(t)$ の行列要素は

$$\begin{aligned}\langle m|\hat{\mathcal{U}}_\alpha(t)|n\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2h}}\langle m|\hat{f}_\alpha|n\rangle\int_0^t dt' e^{i(\omega_\alpha+\Omega_{mn})t'}\\ &= i\frac{2\pi}{\sqrt{2h}}\bar{\gamma}_\alpha f_{mn}\mathcal{D}_1(\omega_\alpha+\Omega_{mn};t)e^{i(\omega_\alpha+\Omega_{mn})t/2}\ ,\end{aligned} \tag{6.2.20}$$

$$\mathcal{D}_1(\omega;t) := \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega/2}\ . \tag{6.2.21}$$

以下，簡単のため $f(q)$ は q の奇函数とする．

$$f(-q) = -f(q)\ , \quad \delta V(-q) = \delta V(q)\ . \tag{6.2.22}$$

双一次模型 (5.1.15) はその例である．すると，状態 $|n\rangle$ の偶奇性 (parity)

$$\langle -q|n\rangle = (-)^n \langle q|n\rangle \tag{6.2.23}$$

により次の選択則 (selection rule) が成り立つ．

$$\langle m|\hat{f}(t)|n\rangle = 0 \ : \ m-n \text{ が偶数}\ , \tag{6.2.24}$$

$$\langle m|\delta\hat{V}(t)|n\rangle = 0 \ : \ m-n \text{ が奇数}\ . \tag{6.2.25}$$

したがって，特に

$$\langle 0|\delta\hat{V}(t)|1\rangle = 0\ , \quad \langle 0|\hat{f}(t_2)\hat{f}(t_1)|1\rangle = 0\ , \tag{6.2.26}$$

すなわち

$$\langle 0|\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{vac}}(t)|1\rangle = 0\ . \tag{6.2.27}$$

同様にして

$$\langle 1|\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{vac}}(t)|0\rangle = 0\ , \tag{6.2.28}$$

$$\langle 0|\hat{\mathcal{U}}_{\alpha}(t)|0\rangle = 0\ , \quad \langle 1|\hat{\mathcal{U}}_{\alpha}(t)|1\rangle = 0\ . \tag{6.2.29}$$

さて，$J(\omega)$ を特徴付ける周波数尺度 ω_{c} は ω_0 より大きい（$\nu_{\mathrm{c}}=0$ とする）．したがって，時間域

$$t \gg \omega_0^{-1} \tag{6.2.30}$$

に関する限り，$J(\omega)$ を含む積分 (6.2.18) において次の近似が許される（以下，時間域 (6.2.30) において成立する近似等式を $\sim$ で表す）．

$$\mathcal{D}_2(\omega;t) \sim \delta(\omega)\ . \tag{6.2.31}$$

$\mathcal{D}_3(\omega;t)$ についても，同積分に寄与するのは $\omega\sim 0$ の部分だけである．これらの性質と，$\hat{H}_S$ の固有値が図 6.1 に示される構造をしていること*4を合わせ考えれば

$$\langle 0|\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{vac}}(t)|0\rangle \ \sim\ e^{-it\delta E_0/h}\left\{1+\frac{i}{h}|f_{10}|^2 F_+(t)\right\}\ , \tag{6.2.32}$$

$$F_{\pm}(t) := \mathcal{P}\int_0^{\infty} d\omega J(\omega)\mathcal{D}_3(\omega\pm\Delta;t)\ . \tag{6.2.33}$$

$\mathcal{D}_2(\omega+\Omega_{m0};t)$ を含む項は，$\omega+\Omega_{m0}>0$ によりすべて消え，$\mathcal{D}_3(\omega+\Omega_{m0};t)$ を含む項のうち $m\geqq 3$ の項も $\Omega_{m0}=\mathcal{O}(1)>0$ により消えたわけである ($m=2$

---

*4 $\{E_n \mid n\geqq 2\}$ が $\{E_0, E_1\}$ から少なくとも $h\omega_0$ 程度隔たっていること．

の項は存在しない)．これらは ω_0^{-1} を特性時間とする過渡的な効果 (transient effects) である（ただし演習問題 6.7 を参照）．同様に

$$\langle 1|\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{vac}}|1\rangle \sim e^{-it\delta E_1/h}\left\{1-\frac{1}{2}\Gamma_1 t+\frac{i}{h}|f_{01}|^2 F_-(t)\right\} . \quad (6.2.34)$$

ただし，式 (6.1.21) から得られる関係

$$\Gamma_1=\frac{2}{h}|f_{01}|^2 J(\Delta)\sim\frac{2}{h}|f_{01}|^2\int_0^\infty d\omega J(\omega)\mathcal{D}_2(\omega-\Delta;t) \quad (6.2.35)$$

を用いた．

以下，Ohm 型環境を念頭に置き，次の状況（弱相互作用状況）を想定する．

$$\eta \ll h . \quad (6.2.36)$$

η は古典運動領域における摩擦係数であった．しかし，この事実をもって $\eta=\mathcal{O}(h^0)\gg h$ と速断してはいけない．η は巨視系と環境の相互作用の強さの目安，一方 h は巨視系の量子性の目安である．両者は独立であって，その比は勝手である．(6.2.36) のような状況を設定することは現実にも可能である (例えば式 (3.1.49) または第 9 章参照)．$|f_{01}|$ は $\mathcal{O}(1)$ の量であるから，上記の状況設定のもとで次の不等式が成り立つ．

$$\Gamma_1=\frac{2\eta}{h}|f_{01}|^2\Delta\ll\Delta\ll\omega_0 . \quad (6.2.37)$$

したがって，時間域

$$\omega_0^{-1}\ll t\ll\Gamma_1^{-1} \quad (6.2.38)$$

が存在する．これを主要時間域*5 と呼び，以下この時間域のみに着目しよう．すると，

$$\langle 0|\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{vac}}(t)|0\rangle \sim \exp\left[-\frac{i}{h}\{t\delta E_0-|f_{10}|^2F_+(t)\}\right] , \quad (6.2.39)$$

$$\langle 1|\hat{\mathcal{U}}_{\mathrm{vac}}(t)|1\rangle \sim e^{-\Gamma_1 t/2}\exp\left[-\frac{i}{h}\{t\delta E_1-|f_{01}|^2F_-(t)\}\right] , \quad (6.2.40)$$

ただし

$$|F_\pm(t)|/h=\mathcal{O}(\eta/h)\ll 1 \quad (6.2.41)$$

＊5　本書の興味の中心となる時間域の意．Γ_1^{-1} に比べれば短時間域（第 4.2 節で使った呼称）であり，ω_0^{-1} を基準にすれば長時間域．

を用いた (後述の式 (6.3.20) 参照).

6.3　巨視的量子共鳴振動

巨視系の初期状態 $|\psi\rangle$ を 4.2 節と同じく

$$|\psi\rangle = |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{6.3.1}$$

と採り，主要時間域 (6.2.38) における $\mathcal{P}_\pm(t)$ を計算しよう．前節の結果により

$$\begin{aligned}\widetilde{|\chi_0(t)\rangle} \sim\ & \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{vac}\rangle \exp\Big[-\frac{i}{h}\{t\delta E_0 - |f_{10}|^2 F_+(t)\}\Big] \\ & - i\frac{\pi}{\sqrt{h}} f_{01} \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha |\alpha\rangle e^{-i(\omega_\alpha + \Delta)t/2} \mathcal{D}_1(\omega_\alpha - \Delta; t) \\ & + \sum_{\alpha\beta} e^{-i(\omega_\alpha + \omega_\beta)t} |\alpha\beta\rangle\langle 0|\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(t)|\psi\rangle \ ,\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{|\chi_1(t)\rangle} \sim\ & -\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{vac}\rangle e^{-\Gamma_1 t/2} \exp\Big[-\frac{i}{h}\{t\delta E_1 - |f_{01}|^2 F_-(t)\}\Big] \\ & + i\frac{\pi}{\sqrt{h}} f_{10} \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha |\alpha\rangle e^{-i(\omega_\alpha - \Delta)t/2} \mathcal{D}_1(\omega_\alpha + \Delta; t) \\ & + \sum_{\alpha\beta} e^{-i(\omega_\alpha + \omega_\beta)t} |\alpha\beta\rangle\langle 1|\hat{\mathcal{U}}_{\alpha\beta}(t)|\psi\rangle \ .\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

したがって

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \|\, \widetilde{|\chi_0(t)\rangle}\, \|^2 \\ &\sim \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{h}|f_{01}|^2 \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha^2 \{\mathcal{D}_1(\omega_\alpha - \Delta; t)\}^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{t}{h}|f_{01}|^2 \int_0^\infty d\omega J(\omega) \mathcal{D}_2(\omega - \Delta; t) \ . \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

式 (6.3.2) の右辺第 3 項の寄与は $\mathcal{O}(\bar{\gamma}_\alpha^4)$ となって 2 次摂動の範囲を超えるから落とした．右辺第 1 項は，巨視系の基底状態の初期確率 $P_0(0)\,(=1/2)$，第 2 項は環境との相互作用によって第 1 励起状態が基底状態に落ちてくる効果 ($\propto |f_{01}|^2$) を表す．主要時間域に着目しているから，(6.2.35) を用いて

$$P_0(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Gamma_1 t \sim 1 - \frac{1}{2}e^{-\Gamma_1 t}. \tag{6.3.5}$$

これは摂動論によって得られた結果であるから，$P_0(t)$ が初期値 $P_0(0)$ と余り違わない場合にのみ妥当である．この結果が使える時間域が主要時間域に他ならない．同様に

$$P_1(t) = \| \widetilde{|\chi_1(t)\rangle} \|^2 \sim \frac{1}{2}e^{-\Gamma_1 t} + \frac{t}{h}|f_{10}|^2 \int_0^\infty d\omega J(\omega)\mathcal{D}_2(\omega+\Delta;t) \ . \tag{6.3.6}$$

右辺第 1 項は，第 1 励起状態が基底状態に落ちる効果，第 2 項は基底状態が第 1 励起状態に上がってくる効果 ($\propto |f_{10}|^2$) を表す．後者は，“$H_S + H_\mathcal{E}$ に関するエネルギー保存則” が成立し得ない($\omega+\Delta=0$ となり得ない)ため消える．ゆえに

$$P_1(t) \sim \frac{1}{2}e^{-\Gamma_1 t} \ . \tag{6.3.7}$$

したがって，2 次摂動の範囲内かつ主要時間域において (4.2.5), (4.2.10), (4.2.12) (ただし $T_1 = 1/\Gamma_1$)が成立する．それゆえ

$$P_0(t) + P_1(t) \sim 1 \ , \tag{6.3.8}$$

$$\mathcal{C}(t) \sim -\langle\chi_0(t)|\chi_1(t)\rangle \ . \tag{6.3.9}$$

つまり主要時間域において，$\mathcal{P}_\pm(t)$ に対する環境の効果は，散逸効果($P_0(t), P_1(t)$ の変化)としてではなく，位相攪乱因子 $\mathcal{C}(t)$ を通して現れる．規格化因子 (4.2.9) を用いると

$$\begin{aligned}|\chi_0(t)\rangle \sim\ & |\mathrm{vac}\rangle e^{-\Gamma_1 t/2} \exp\left[-\frac{i}{h}\{t\delta E_0 - |f_{10}|^2 F_+(t)\}\right] \\ & - i\pi\sqrt{\frac{2}{h}}\, f_{01} \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha |\alpha\rangle e^{-i(\omega_\alpha+\Delta)t/2}\mathcal{D}_1(\omega_\alpha - \Delta; t) \\ & + \cdots ,\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

$$\begin{aligned}|\chi_1(t)\rangle \sim\ & -|\mathrm{vac}\rangle \exp\left[-\frac{i}{h}\{t\delta E_1 - |f_{01}|^2 F_-(t)\}\right] \\ & + i\pi\sqrt{\frac{2}{h}}\, f_{10} \sum_\alpha \bar{\gamma}_\alpha |\alpha\rangle e^{-i(\omega_\alpha-\Delta)t/2}\mathcal{D}_1(\omega_\alpha + \Delta; t) \\ & - \cdots ,\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

ただし … は $|\alpha\beta\rangle$ の項を表す．つまり，初期時刻には $|\mathrm{vac}\rangle$ 方向に揃っていた $|\chi_0(t)\rangle$ と $|\chi_1(t)\rangle$ が，時間が経つにつれて次第にずれてくる．これは図 4.1 に示されているのと同様の状況である．これを，環境による位相攪乱効果その 1 と呼ぶ．この効果を端的に示すのが，$|\chi_0(t)\rangle$ の $|\mathrm{vac}\rangle$ 項に現れた因子 $e^{-\Gamma_1 t/2}$ であって，$|\mathrm{vac}\rangle$ 成分が減少し，その分だけ $|\alpha\rangle$ 成分が登場することを表す．また，式 (6.2.39) と (6.2.40) に至る計算から分かるように，

$$\begin{cases} \text{巨視系} & : |0\rangle \to |1\rangle \to |0\rangle \\ \text{環境} & : |\mathrm{vac}\rangle \to |\alpha\rangle \to |\mathrm{vac}\rangle \end{cases} \tag{6.3.12}$$

という過程が $|\chi_0(t)\rangle$ の $|\mathrm{vac}\rangle$ 項の係数に位相 $|f_{10}|^2F_+(t)/h$ を与え，

$$\begin{cases} \text{巨視系} & : |1\rangle \to |0\rangle \\ \text{環境} & : |\mathrm{vac}\rangle \to |\alpha\rangle \end{cases} \tag{6.3.13}$$

という過程が $|\chi_1(t)\rangle$ の $|\mathrm{vac}\rangle$ 項の係数に位相 $|f_{01}|^2F_-(t)/h$ を与える．これを環境による位相攪乱効果その 2 と呼ぶ．

具体的に $\mathcal{C}(t)$ を計算すると

$$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_{\mathrm{vac}} + \mathcal{C}_{\mathrm{exc}}(t)\ . \tag{6.3.14}$$

$\mathcal{C}_{\mathrm{vac}}$ は環境が初期状態 $|\mathrm{vac}\rangle$ に留まっている部分，$\mathcal{C}_{\mathrm{exc}}$ は環境が励起される部分である．

$$\mathcal{C}_{\mathrm{vac}}(t) \sim e^{-\Gamma_1 t/2} \exp\left[-it\Delta' - \frac{i}{h}(|f_{10}|^2F_+(t) - |f_{01}|^2F_-(t))\right]\ , \tag{6.3.15}$$

$$\mathcal{C}_{\mathrm{exc}}(t) \sim \frac{4\pi}{h}(f_{10})^2 e^{it\Delta}\int_0^\infty d\omega J(\omega)\mathcal{D}_1(\omega-\Delta;t)\mathcal{D}_1(\omega+\Delta;t)\ , \tag{6.3.16}$$

$$\Delta' := (\delta E_1 - \delta E_0)/h\ . \tag{6.3.17}$$

以下，次の時間域に着目しよう．

$$\Delta^{-1} \ll t \ll \Gamma_1^{-1}. \tag{6.3.18}$$

これは主要時間域の一部分である．この時間域にて

$$h(f_{10})^{-2}e^{-it\Delta}\mathcal{C}_{\mathrm{exc}}(t) \sim \frac{J(\Delta)}{\Delta}\sin(t\Delta) - 2J'(0)\frac{1}{\pi(t\Delta)^2}\ , \tag{6.3.19}$$

$$F_+(t) \sim J'(0)\frac{\sin(t\varDelta)}{\pi(t\varDelta)^2}\ , \quad F_-(t) \sim -J'(\varDelta) - J'(0)\frac{\sin(t\varDelta)}{\pi(t\varDelta)^2}\ , \tag{6.3.20}$$

ただし

$$J'(\omega) \equiv dJ(\omega)/d\omega\ . \tag{6.3.21}$$

ゆえに $\mathcal{P}_\pm(t)$ の干渉項は (4.2.40) の第 1 式の形に表される．

$$\mathcal{P}_\pm(t) \sim \frac{1}{2}\{1 \mp e^{-\varGamma_1 t/2}\cos(t\tilde{\varDelta} - \theta_0)\}\ , \tag{6.3.22}$$

$$\tilde{\varDelta} \equiv \varDelta + \varDelta'\ , \quad \theta_0 \equiv |f_{01}|^2\{J(\varDelta)/\varDelta - J'(\varDelta)\}/h\ . \tag{6.3.23}$$

上述の通り，$e^{-\varGamma_1 t/2}$ と θ_0 がそれぞれ位相攪乱効果その 1 とその 2 を表す．

かくて次の結論に達する．弱相互作用状況 (6.2.36) を設定すれば，時間域 (6.3.18) において，周波数 $\tilde{\varDelta}$ の量子共鳴振動が起こる．ただし，振動の位相は θ_0 だけずれる．この際，エネルギー散逸((4.2.12) 参照)はほとんど起こらない*6．この結果は，定常摂動論を用いて δE_n と $\varGamma_n$ を計算しただけでは得られないものである．

環境の効果が，η を通して，$\varDelta'$, $F_\pm(t)$, $\varGamma_1$ などに現れた．しかし，このことを "MQC に対する摩擦の効果" と称するのは当たらない．定数 η は式 (5.6.8) において摩擦係数の役割をしているけれども，上述の通り $\mathcal{C}(t)$ に対する環境の効果は，巨視系エネルギーの散逸とは異なる効果である．また，巨視系エネルギーの緩和時間は $\varGamma_1^{-1}$ であって，これも古典的状況 (5.6.8) におけるエネルギー緩和時間とは全く異なる ((5.6.12) 参照)．η は，巨視系と環境の相互作用の強さの目安であり，状況に応じて種々の役割を担うわけである．環境効果が単一の定数 η にまとめられてしまったのは，相互作用の形が一種類($x_\alpha f(q)$)しかない模型を扱ったからである．より複雑な模型*7を考えれば事情は変わる．

通常の巨視的現象を考える際には，$\eta t \gtrsim 1$ という時間域 (式 (5.6.8) にて摩擦項の効果が顕著になる時間域) に焦点を当てることが多い．このような長時間域を議論しようとすると，相互作用を摂動論で扱うわけにはいかなくなる．形式的に摂動展開したとすれば無限次まで足し上げなければならない．これを

---

*6　もちろん，強相互作用状況 ($\eta \gg h$) を設定すれば $\varGamma_1 \gg \varDelta$ となり，量子共鳴振動は一周期を経ずして減衰してしまうであろう．

*7　例えば相互作用として $p_\alpha p$ の形の項を加えたもの．

実行するための高級技法が種々考案されている．もちろん，近似的にしか計算できないので近似の妥当性が問題になるが，近似成立条件を正確に見極めることは一般に難しい．つまり，量子的性質がほとんど失われて古典的性質が前面に登場するような状況を論じようとすると，相当な難事業となる．対照的に，本書で主眼を置くのは量子的性質が良く保たれている状況である．これは主要時間域 (6.2.38) にて見られる状況であり，その際には単純な 2 次摂動で充分なのである．まことに幸いな事情といわねばならない[*8].

6.4　量子共鳴周波数の見積もり

前節までの結果により，量子共鳴振動の周波数 $\tilde{\Delta}$ は環境の影響によって Δ から Δ' だけずれたものであることが分かった．その大きさは第 6.1 節の定常摂動論によって求められるが，これを具体的に評価するのはいささか厄介である．簡単のため，巨視系を二状態系 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ で置き換えた場合について注釈しておこう．この場合には，式 (6.1.20) より

$$\Delta' \simeq -\frac{1}{\pi h}|f_{01}|^2 \Delta \mathcal{P}\int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} J(\omega)\left(\frac{1}{\omega-\Delta}+\frac{1}{\omega+\Delta}\right) . \quad (6.4.1)$$

Ohm 型環境を仮定して上の積分を計算すると

$$\Delta' \simeq -\alpha\Delta\left\{\log\left(\frac{p\omega_c}{\Delta}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{\Delta}{\omega_c}\log\frac{\omega_c}{\Delta}\right)\right\} . \quad (6.4.2)$$

$$\alpha := (2\eta/\pi h)|f_{01}|^2 . \quad (6.4.3)$$

p は $\mathcal{O}(1)$ の正数である．式 (2.4.1) より

$$\frac{\Delta}{\omega_c} = \mathcal{O}\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}h^{-1/2}e^{-1/h}\right) . \quad (6.4.4)$$

したがって (6.4.2) 式右辺第 2 項は落としてよい．ところが

$$\log(\omega_c/\Delta) = \mathcal{O}(h^{-1}) . \quad (6.4.5)$$

ゆえに，摂動論の成立条件 $|\Delta'/\Delta| \ll 1$ を満たすためには，η に対して (6.2.36) よりもはるかに厳しい条件 $\eta \ll h^2$ を課さなければならない．この条件が成り

---

*8　もっとも，超絶技巧好みの読者にはご不満かもしれない．

立たない場合(例えば $h^2 < \eta \ll h$ の場合)には摂動の高次項を取り入れる必要がある．繰り込まれた摂動論[*9]の精神で高次項を処理すれば

$$\tilde{\Delta} \equiv \Delta + \Delta' \simeq \Delta - \alpha\tilde{\Delta}\log\left(\frac{p\omega_c}{\tilde{\Delta}}\right) + \cdots . \tag{6.4.6}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\Delta &\simeq \left\{1 + \alpha\log\left(\frac{p\omega_c}{\tilde{\Delta}}\right) + \cdots\right\}\tilde{\Delta} \\ &\simeq \tilde{\Delta}\exp\left\{\alpha\log\left(\frac{p\omega_c}{\tilde{\Delta}}\right)\right\} = \left(\frac{p\omega_c}{\tilde{\Delta}}\right)^{\alpha}\tilde{\Delta} .\end{aligned} \tag{6.4.7}$$

これを $\tilde{\Delta}$ について解くと

$$\tilde{\Delta} \simeq \left(\frac{\Delta}{p\omega_c}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\Delta . \tag{6.4.8}$$

この結果を信ずるならば，次の結論に導かれる．

η に臨界値

$$\eta_c := \frac{\pi}{2|f_{01}|^2}h \tag{6.4.9}$$

が存在し，η が η_c に近づくと $\tilde{\Delta}$ は急激に 0 になる (図 6.2)．

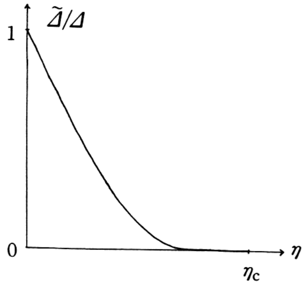


図 6.2　量子共鳴周波数の η 依存性

＊9　摂動を受ける前の量(本節の例では Δ)をもとにして摂動項を計算するのが通常の摂動論(Rayleigh-Schrödinger 摂動論)である．これに対し，繰り込まれた摂動論(Brillouin-Wigner 摂動論)では，摂動効果を取り入れた量(本節の例では $\tilde{\Delta}$)をもとにして摂動項を計算する．式 (6.4.6) の右辺第 2 項がその例である．これは (6.4.2) 式右辺第 1 項にて Δ を $\tilde{\Delta}$ で置き換えたものである．

このような事情が生ずるのは Ohm 型環境の特徴であって，低周波数の環境振動子が多量に存在することによる．これは興味深い結果である*10．しかし，$\eta \sim \eta_c$ というのは相互作用が強い(条件 (6.2.36) が成立しない)状況であって，本書の主たる興味の範囲外にある．それゆえ，式 (6.4.8) に至る道筋の詳細には触れない*11．

演習問題

6.1　$f(q)=q$, $V(q)=V^{\mathrm{SSDW}}(q)$ の場合に f_{01} を計算せよ．

6.2　(1) 量子共鳴振動に対する環境の影響は，巨視系が左または右の井戸内にいるときにもたらされるのか，それとも“トンネルしているとき”かという類の問いがしばしば発せられる．これは，トンネル現象に対する古典的描像(“粒子がトンネルを通過していく”)に基づく設問であり，量子力学的にどのように定式化されるべきか必ずしも明らかではない．これに答える一つの方策として，

$$f(q) = q\ \theta(|q|-a)\ :\ 0<a\ll 1 \tag{6.4.10}$$

という場合を考えてみよう．領域 $|q|<a$ では相互作用しないという模型である．もし巨視系の波束が左(または右)井戸内に局在しているならば，実効的に $f(q)=q$ となって第 5 章の式 (5.6.8) が成り立つ．つまり，古典的な摩擦運動という描像は定数 a に左右されない．では，量子共鳴振動は a にどのように依存するか．

(2) 次の模型も左右井戸内では実効的に $f(q)=q$ と同じである．

$$f(q) = \frac{q^2/a}{1+|q|/a}\ :\ 0<a\ll 1\,. \tag{6.4.11}$$

しかしこれは偶函数である．この場合に本章の議論を繰り返してみよ．

6.3　初期状態として，(6.2.4) ∧ (6.3.1) の代わりに次の状態を採ったらどうなるか．

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |\Psi_-\rangle\rangle\,, \tag{6.4.12}$$

ただし

---

*10　臨界値 η_c は量子的世界と古典的世界の境界標識とみなされることがある．

*11　上述の議論は余りにも粗っぽく，眉唾ものである．単に雰囲気を伝えるだけのものと了解されたい．詳細は例えば巻末の文献[16,17]参照．なお，現実的な系に対しては二状態近似は理想化に過ぎ，$n\geqq 2$ の状態の存在が重要となり得る．

$$|\Psi_\pm\rangle\rangle \equiv \int dq \langle q|\pm\rangle |q\rangle |\{\xi(q)\}\rangle \ , \tag{6.4.13}$$

$$\{\xi(q)\} \equiv \{\xi_1(q),\ \xi_2(q),\ \cdots,\ \xi_N(q)\}, \quad \xi_\alpha(q) \equiv (\omega_\alpha/2h)^{1/2} f_\alpha(q)\ . \tag{6.4.14}$$

$|\{\xi\}\rangle$ は環境振動子に関するコヒーレント状態である．

$$b_\alpha|\{\xi\}\rangle = \xi_\alpha|\{\xi\}\rangle\ . \tag{6.4.15}$$

状態 (6.4.13) の意味を理解すべく，q によらぬ定数 $\bar{\xi}$ で $\xi(q)$ を置き換えたものを $|\Psi'_\pm\rangle\rangle$ とすれば

$$|\Psi'_\pm\rangle\rangle = \int dq |q\rangle\langle q|\pm\rangle |\{\bar{\xi}\}\rangle = |\pm\rangle |\{\bar{\xi}\}\rangle\ . \tag{6.4.16}$$

これから察せられるように，状態 (6.4.12) においては，巨視系は左井戸に局在しており，巨視系の位置 q に応じて環境振動子の原点がずれている．振動子 α のずれは $f_\alpha(q)$ である，すなわち所与の q のもとでポテンシャルの値が最低になるようにずれている (式 (5.1.13) 参照)．

6.4　環境が巨視系に忠実に追随し，後者が状態 $|+\rangle$ ($|-\rangle$) にある場合には全系の状態は必ず $|\Psi_+\rangle\rangle$ ($|\Psi_-\rangle\rangle$) になるものと仮定してみよう（このような環境は**断熱的環境** (adiabatic environment) と呼ばれる）．全系の Hilbert 空間を二状態 $\{|\Psi_\pm\rangle\rangle\}$ で近似すれば，

$$\begin{aligned}\hat{H} \simeq\ & \breve{E}_+|\Psi_+\rangle\rangle\langle\langle\Psi_+| + \breve{E}_-|\Psi_-\rangle\rangle\langle\langle\Psi_-| \\ & - \frac{1}{2}h\breve{\Delta}(|\Psi_+\rangle\rangle\langle\langle\Psi_-| + |\Psi_-\rangle\rangle\langle\langle\Psi_+|)\ .\end{aligned} \tag{6.4.17}$$

$\breve{E}_\pm$, $\breve{\Delta}$ を求めよ．$|\Psi_+\rangle\rangle$ と $|\Psi_-\rangle\rangle$ とで環境振動子の波束の中心がずれているため，

$$\frac{\breve{\Delta}}{\Delta} = \frac{|\langle\langle\Psi_-|\hat{H}|\Psi_+\rangle\rangle|}{|\langle -|\hat{H}_S|+\rangle|} < 1\ . \tag{6.4.18}$$

上式左辺は分子スペクトル線強度の公式に現れる **Frank-Condon 因子**に相当する．

6.5　$J(\omega)$ が (5.3.7) で与えられて $s=1$ であっても，$\nu_c \gg \Delta$ ならば，第 6.4 節の内容はどのように変更されるか．$s=3$, $\nu_c=0$ という超 Ohm 型環境の場合はどうか．

6.6　相互作用の形を一般化（第 6.3 節末尾参照）して本章の議論を繰り返せ．

6.7　式 (6.2.31) から (6.3.23) に至る計算は，いささか煩雑なので，最終結果に本質的に影響しない項は随所で無視してある．(6.2.31) に対する補正項は $\mathcal{O}(1/t)$ であり，同様の補正項が (6.2.35), (6.3.4), (6.3.6) からも現れる．(6.3.19) の右辺では $\cos(t\Delta)$ に比例する項が無視されている．これらをすべて計算せよ．結果は，(6.3.22) の各項に $1+\mathcal{O}(\eta/h)$ の形の定数因子が掛かるだけであろう．なお，過渡項のうち $\mathcal{D}_2(\omega+\Delta;\,t)$ を含むものが無視できる時間域は正確には (6.3.18) である．

7 調和環境中の量子崩壊

前章と同じく，Hamiltonian(5.1.8)–(5.1.11) で記述される系を扱う．ただし本章では，巨視系ポテンシャル $V(q)$ は図 2.1(ロ) のたんこぶ坂とし，MQT 状況を考える．

7.1 崩壊率についての予想

巨視系が孤立している（環境と相互作用しない）場合，準安定状態の崩壊率は式 (2.4.5) で与えられた．この公式において最も重要な因子は指数函数の肩に乗った B/h であり，B は h を含まない量であった．また A は h のおとなしい函数であった．環境との相互作用がある場合に崩壊率がどうなるか，自明ではないが，次のように予想してみよう．

予想 0: 準安定状態の崩壊率 Γ を

$$\Gamma = A \exp(-B/h) \tag{7.1.1}$$

と表せば，A は h のおとなしい函数であり，B は h を含まない量である．

環境効果が定数 η としてまとめられるならば，A も B も η の函数である．因子 A, B は単一自由度の場合の表式を自然に拡張したものとなろう．ただし B の表式 (2.4.7) は単一自由度系に特有の形をしており，そこに現れる q 積分をどのように手直しすべきか，よく分からない．しかし幸いなことに，B を式 (2.6.11) のように表して跳返作用と見ることもできた．跳返作用なる概念は系の自由度の個数にかかわらず定義され得るので，この見地に立てば拡張は容易である．そこで追加予想を立てよう．

予想 1: B は跳返作用に等しい．

これら予想を確かめるには相当の準備がいるから，機会があれば稿を改めて論ぜざるを得ない．本章ではその帰結を調べることにする．ただし，予想1を正確にいい表すためには，多自由度系における Euclid 作用汎函数およびその停留点としての跳返を定義する必要がある．

7.2　Euclid 作用汎函数と跳返

Hamiltonian(2.1.6) に対応する Euclid 作用汎函数 $S[q]$ が式 (2.6.12) で定義されたのにならい，Hamiltonian(5.1.8) に対応する Euclid 作用汎函数 $S[q,x]$ は次式で定義される．

$$S[q,x] := S[q] + S_1[q,x], \tag{7.2.1}$$

$$S_1[q,x] := \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left\{ (\dot{x}_\alpha(\tau))^2 + \omega_\alpha^2 (x_\alpha(\tau) - f_\alpha(q(\tau)))^2 \right\}. \tag{7.2.2}$$

$S[q]$ は式 (2.6.12) で定義されたものである．環境振動子をまとめて x と書いた．

$$x := \{x_\alpha \mid \alpha = 1, 2, \cdots, N\}. \tag{7.2.3}$$

式 (7.2.1) は，ポテンシャル

$$-V(q) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \omega_\alpha^2 (x_\alpha - f_\alpha(q))^2 \tag{7.2.4}$$

のもとで運動する架空粒子系 (q,x) の，Euclid 時間に関する作用積分である．この汎函数の定義域 $\mathcal{F}_\infty$ を次のように採る．

$$\mathcal{F}_\infty := \{(q,x) \mid q(\pm\infty) = 0,\ x(\pm\infty) = 0\}. \tag{7.2.5}$$

これは，単一自由度の場合の函数空間 (2.6.13) の多自由度版である[*1]．

汎函数 $S[q,x]$ の非自明な停留点を $(\mathcal{Q},\chi)$ と書き，これを**跳返** (bounce) と呼ぶ．

$$\left. \frac{\delta S[q,x]}{\delta q(\tau)} \right|_{(q,x)=(\mathcal{Q},\chi)} = 0, \tag{7.2.6}$$

---

*1　混乱の恐れはないので前者と同じ記号で表す．

$$\left.\frac{\delta S[q,x]}{\delta x_\alpha(\tau)}\right|_{(q,x)=(\mathcal{Q},\chi)} = 0\,, \qquad (7.2.7)$$

$$\mathcal{Q}(0) > 0, \quad \dot{\mathcal{Q}}(0) = 0\,. \qquad (7.2.8)$$

最後の条件 $\dot{\mathcal{Q}}(0)=0$ は必ずしも必要ではないが，跳返を一義的に定めるために課しておいた．この事情は，作用汎関数の時間並進不変性に由来するもので，単一自由度系の場合と同じである．もちろん，記法 (7.2.3) に従い，

$$\chi := \{\chi_\alpha \mid \alpha = 1, 2, \cdots, N\}\,. \qquad (7.2.9)$$

以上の定義を用いて予想 1 を言い表すと

$$B = S[\mathcal{Q}, \chi]\,. \qquad (7.2.10)$$

7.2.1 有効 Euclid 作用汎函数と停留点

単一自由度系に対する表式 (2.6.11) との形式的対応は，以下のように考えると一層明白になる．まず，$\mathcal{F}_\infty$ に属する勝手な函数 q が与えられたとし，次式によって $x^{[q]}$ を定義する．

$$\left.\frac{\delta S[q,x]}{\delta x_\alpha(\tau)}\right|_{x=x^{[q]}} = 0\,. \qquad (7.2.11)$$

$x^{[q]}$ は q の汎函数である．次いで

$$S_{\text{eff}}[q] := S[q, x^{[q]}] \qquad (7.2.12)$$

と定義する．これは q のみの汎函数であり，**有効 Euclid 作用汎函数** (effective Euclidean action functional) と呼ばれる．これを用いると，予想 (7.2.10) は

$$B = S_{\text{eff}}[\mathcal{Q}]\,. \qquad (7.2.13)$$

この $\mathcal{Q}$ は前小節におけるものと同一であるが，次式で定義されると見ることもできる．

$$\left.\frac{\delta S_{\text{eff}}[q]}{\delta q(\tau)}\right|_{q=\mathcal{Q}} = 0\,, \quad \mathcal{Q}(0) > 0\,, \quad \dot{\mathcal{Q}}(0) = 0\,. \qquad (7.2.14)$$

すなわち，$\mathcal{Q}$ は $S_{\text{eff}}[q]$ の非自明な停留点である．

式 (7.2.13), (7.2.14) は以下のようにして証明される．まず式 (7.2.7) と (7.2.11) を比べて

$$\chi = x^{[\mathcal{Q}]}\,. \qquad (7.2.15)$$

次に，有効 Euclid 作用汎函数を微分すると（付録 C）

$$\frac{\delta S_{\mathrm{eff}}[q]}{\delta q(\tau)} = \left.\frac{\delta S[q,x]}{\delta q(\tau)}\right|_{x=x^{[q]}} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \sum_{\alpha} \left.\frac{\delta S[q,x]}{\delta x_\alpha(\tau')}\right|_{x=x^{[q]}} \frac{\delta x_\alpha^{[q]}(\tau')}{\delta q(\tau)}. \tag{7.2.16}$$

したがって，(7.2.15) を用いて，

$$\left.\frac{\delta S_{\mathrm{eff}}[q]}{\delta q(\tau)}\right|_{q=\mathcal{Q}} = \left.\frac{\delta S[q,x]}{\delta q(\tau)}\right|_{(q,x)=(\mathcal{Q},\chi)} + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \sum_{\alpha} \left.\frac{\delta S[q,x]}{\delta x_\alpha(\tau')}\right|_{(q,x)=(\mathcal{Q},\chi)} \left.\frac{\delta x_\alpha^{[q]}(\tau')}{\delta q(\tau)}\right|_{q=\mathcal{Q}}. \tag{7.2.17}$$

ここで (7.2.6) と (7.2.7) を使えば式 (7.2.14) が得られる．すなわち，$S_{\mathrm{eff}}[q]$ の停留点として $\mathcal{Q}$ が定められ，これと (7.2.15) から χ が得られる．この 2 段階の手続を経て $S[q,x]$ の停留点 $(\mathcal{Q},\chi)$ が求められるというわけである．

単一自由度系の場合と似た形と言っても，あくまで形式的に対応しているに過ぎず，内容は大いに異なる．多自由度の一部を消去して得られる有効 Euclid 作用汎函数は，時間に関して非局所的である（詳しくは次節）．

7.2.2　調和環境模型における有効 Euclid 作用汎函数

前節の一般的考察に基づき，調和環境模型について，まず $x^{[q]}$ を求めよう．以下 $x_\alpha^{[q]}$ を x_α と略記すれば，方程式 (7.2.11) は

$$-\ddot{x}_\alpha(\tau) + \omega_\alpha^2 x_\alpha(\tau) = 2\omega_\alpha \tilde{f}_\alpha(\tau), \tag{7.2.18}$$

$$\tilde{f}_\alpha(\tau) \equiv \frac{1}{2}\omega_\alpha f_\alpha(q(\tau)). \tag{7.2.19}$$

したがって，解くべき問題は次の通りである．

$\tilde{f}_\alpha(\tau)$ が $\tau \to \pm\infty$ で 0 になる所与の函数であるとして，
方程式 (7.2.18) の解で境界条件

$$\lim_{\tau \to \pm\infty} x_\alpha(\tau) = 0 \tag{7.2.20}$$

を満たすものを求めよ．

所望の解は

$$x_\alpha(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-\omega_\alpha|\tau-\tau'|} \tilde{f}_\alpha(\tau') . \tag{7.2.21}$$

ちなみに，この式は次の形に書くこともできる．

$$x_\alpha(\tau) = \int_0^{\infty} d\tau' e^{-\omega_\alpha \tau'} \{\tilde{f}_\alpha(\tau-\tau') + \tilde{f}_\alpha(\tau+\tau')\} . \tag{7.2.22}$$

解 (7.2.21) を (7.2.1) に代入して得られる有効 Euclid 作用汎函数を次のように書く．

$$S_{\mathrm{eff}}[q] = S[q] + S_{1\mathrm{eff}}[q] . \tag{7.2.23}$$

$S_{1\mathrm{eff}}[q]$ は正であることに注意しておこう．部分積分を 1 回実行すると

$$S_{1\mathrm{eff}}[q] = \frac{1}{2} \sum_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ -x_\alpha(\tau)\ddot{x}_\alpha(\tau) + \omega_\alpha^2 (x_\alpha(\tau) - f_\alpha(q(\tau)))^2 \right\} . \tag{7.2.24}$$

もちろん右辺の $x_\alpha(\tau)$ は (7.2.21) で与えられるものである．$x_\alpha(\tau)$ が (7.2.18) を満たすことを使うと

$$S_{1\mathrm{eff}}[q] = \sum_\alpha \sigma_\alpha[q] , \tag{7.2.25}$$

$$\sigma_\alpha[q] := \frac{1}{2}\omega_\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f_\alpha(q(\tau)) \{ f_\alpha(q(\tau)) - x_\alpha(\tau) \} . \tag{7.2.26}$$

さらに (7.2.21) を用いれば

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha[q] &= \sigma_{\alpha 0}[q] + \sigma_{\alpha 1}[q] , \\
\sigma_{\alpha 0}[q] &:= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{\tilde{f}_\alpha(\tau)\}^2 , \\
\sigma_{\alpha 1}[q] &:= -\omega_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \tilde{f}_\alpha(\tau) e^{-\omega_\alpha|\tau-\tau'|} \tilde{f}_\alpha(\tau') .
\end{aligned} \tag{7.2.27}$$

これを簡単化するために Caldeira-Leggett 手品を使おう．すなわち，関係式

$$fg = \frac{1}{2}(f^2+g^2) - \frac{1}{2}(f-g)^2 , \tag{7.2.28}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \{\tilde{f}_\alpha(\tau)\}^2 e^{-\omega_\alpha|\tau-\tau'|} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{\tilde{f}_\alpha(\tau)\}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{-|t|} = \sigma_{\alpha 0}[q]
\end{aligned} \tag{7.2.29}$$

を用いて

$$\sigma_\alpha[q] = \frac{\omega_\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-\omega_\alpha|\tau-\tau'|}\{\tilde{f}_\alpha(\tau)-\tilde{f}_\alpha(\tau')\}^2$$
$$= \left(\frac{\omega_\alpha}{2}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-\omega_\alpha|\tau-\tau'|}\{f_\alpha(q(\tau))-f_\alpha(q(\tau'))\}^2. \quad (7.2.30)$$

かくて (7.2.23), (7.2.25), (7.2.30) により有効 Euclid 作用汎函数が具体的に得られた．上式の右辺が時間に関する二重積分であることに注意されたい．1 変数 τ のみによる Lagrangian を τ で積分して与えられる通常の作用が“時間に関して局所的な作用”と呼ばれるのに対し，上式のように 2 個以上の時間変数に関する積分で与えられるものは**時間に関して非局所的な作用**と呼ばれる．この非局所性が有効作用の重要な特徴である．

以下，第 5 章におけると同じく，共通一次模型 (5.1.14) に話を限る．勝手な正の定数 η（その採り方については後述）を導入して

$$\mathcal{J}(\tau) := \frac{1}{2\eta}\sum_\alpha \gamma_\alpha^2 \omega_\alpha^3 e^{-\omega_\alpha|\tau|} \quad (7.2.31)$$

と置けば，

$$S_{1\text{eff}}[q] = \frac{\eta}{4}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \mathcal{J}(\tau-\tau')\{f(q(\tau))-f(q(\tau'))\}^2. \quad (7.2.32)$$

この形に書かれた $S_{1\text{eff}}[q]$ は **Caldeira-Leggett 有効作用** (Caldeira-Leggett effective action) と呼ばれる．積分核 $\mathcal{J}(\tau)$ の性質について述べておこう．式 (5.3.3) で定義された環境周波数分布函数 $J(\omega)$ を用いると

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{1}{\pi\eta}\int_0^{\infty} d\omega J(\omega) e^{-\omega|\tau|}. \quad (7.2.33)$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathcal{J}(\tau) = \frac{2}{\pi\eta}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{\omega}J(\omega) = \frac{1}{\eta}\mathcal{T}(0) < \infty, \quad (7.2.34)$$

ただし $\mathcal{T}(t)$ は (5.4.1) で定義された遅延抵抗函数である．特に Ohm 型環境の場合には，(5.3.7) にて $s=1$, $\nu_c=0$ と置いて得られる $J(\omega)$ を使えば，

$$\mathcal{J}^{\text{Ohm 型}}(\tau) = \frac{1}{\pi(|\tau|+\omega_c^{-1})^2}. \quad (7.2.35)$$

ただし，(7.2.31) で導入した勝手な定数 η の値を，$J(\omega)$ に現れる η と同一に

採った．$\mathcal{J}(\tau)$ が τ^{-2} に比例した長い尾を引く(つまり時間に関する非局所性が甚だしい)ことが Ohm 型環境の特徴である．

7.3　双一次模型における跳返と崩壊率

前節の内容はポテンシャル V が何であっても形式的に成り立つ．以下，V はたんこぶ坂とし，かつ双一次模型 (5.1.15) に話を限って，跳返を調べてみよう．跳返を決める方程式 (7.2.14) を具体的に書き下すと

$$\ddot{\mathcal{Q}}(\tau) = V'(\mathcal{Q}(\tau)) + \eta\int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\mathcal{J}(\tau-\tau')\{\mathcal{Q}(\tau)-\mathcal{Q}(\tau')\}, \qquad (7.3.1)$$

$$\mathcal{Q}(0) > 0, \quad \dot{\mathcal{Q}}(0) = 0. \qquad (7.3.2)$$

$\mathcal{J}$ が時間差 $\tau-\tau'$ のみの函数であるから，期待通り，方程式 (7.3.1) は時間に関する並進対称性を持つ．

この方程式を数値的に解くことは任意の η に対して可能である．しかし，前章でも述べた通り，本書の興味は η の小さい場合にある．環境と巨視系の相互作用定数 $\{\gamma_\alpha\}$ が小さい，すなわち

$$\eta \ll 1, \quad \tilde{\gamma}_\alpha := \gamma_\alpha/\eta^{1/2} = \mathcal{O}(1) \equiv \mathcal{O}(\eta^0), \qquad (7.3.3)$$

$$\mathcal{J}(\tau) = \mathcal{O}(1) \qquad (7.3.4)$$

として，$\mathcal{Q}$ を η に関する摂動論で求めてみよう．

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{(0)} + \eta\mathcal{Q}^{(1)} + \eta^2\mathcal{Q}^{(2)} + \cdots \qquad (7.3.5)$$

と展開し，(7.3.1) に代入して η の各次数の係数を比べる．2 次までについての結果を書けば

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathcal{Q}}^{(0)}(\tau) &= V'(\mathcal{Q}^{(0)}(\tau)), \\
\mathcal{D}_*\mathcal{Q}^{(1)}(\tau) &= -\int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\mathcal{J}(\tau-\tau')\{\mathcal{Q}^{(0)}(\tau)-\mathcal{Q}^{(0)}(\tau')\}, \qquad (7.3.6)\\
\mathcal{D}_*\mathcal{Q}^{(2)}(\tau) &= -\frac{1}{2}V'''(\mathcal{Q}^{(0)}(\tau))\{\mathcal{Q}^{(1)}(\tau)\}^2 \\
&\quad -\int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\mathcal{J}(\tau-\tau')\{\mathcal{Q}^{(1)}(\tau)-\mathcal{Q}^{(1)}(\tau')\},
\end{aligned}$$

ただし

$$\mathcal{D}_* := -\frac{d^2}{d\tau^2} + v_*(\tau)\,, \quad v_*(\tau) := V''(\mathcal{Q}^{(0)}(\tau))\,. \tag{7.3.7}$$

$\mathcal{Q}^{(0)}$ は，第 1 章で登場した単一自由度系における跳返に他ならない．微分演算子 $\mathcal{D}_*$ の Green 函数のうち，$\tau=-\infty$ で Dirichlet 境界条件かつ $\tau=0$ で Neumann 境界条件を満たすものを $\mathcal{G}_*(\tau,\tau')$ とする．

$$\mathcal{D}_*\mathcal{G}_*(\tau,\tau') = \delta(\tau-\tau')\,, \tag{7.3.8}$$

$$\mathcal{G}_*(\tau,\tau') = \mathcal{G}_*(\tau',\tau)\,, \tag{7.3.9}$$

$$\mathcal{G}_*(-\infty,\tau') = \dot{\mathcal{G}}_*(0,\tau') = 0 \ : \ \forall\tau' \in (-\infty,0)\,. \tag{7.3.10}$$

これを用いて

$$\mathcal{Q}^{(1)}(\tau) = -\int_{-\infty}^{0} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'' \mathcal{G}_*(\tau,\tau')\mathcal{J}(\tau'-\tau'')\{\mathcal{Q}^{(0)}(\tau') - \mathcal{Q}^{(0)}(\tau'')\} \ : \tau < 0\,. \tag{7.3.11}$$

式 (7.3.6) の右辺が τ について偶であるから，(7.3.11) を偶函数に拡張することができる．こうして，跳返に対する 1 次補正が得られる．2 次以上の補正についても同様である．

原理的に摂動論によって跳返を求められることが分かったから，跳返作用も η で展開できる．

$$B = B^{(0)} + \eta B^{(1)} + \eta^2 B^{(2)} + \cdots\,. \tag{7.3.12}$$

2 次までの範囲で正しい等式を $\simeq$ で表せば

$$\begin{aligned} B &\simeq S_{\text{eff}}[\mathcal{Q}^{(0)} + \eta\mathcal{Q}^{(1)} + \eta^2\mathcal{Q}^{(2)}] \\ &\simeq S[\mathcal{Q}^{(0)} + \eta\mathcal{Q}^{(1)} + \eta^2\mathcal{Q}^{(2)}] + S_{1\text{eff}}[\mathcal{Q}^{(0)} + \eta\mathcal{Q}^{(1)}]\,. \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

第 1 項は

$$\begin{aligned} &S[\mathcal{Q}^{(0)} + \eta\mathcal{Q}^{(1)} + \eta^2\mathcal{Q}^{(2)}] \\ &\simeq S[\mathcal{Q}^{(0)}] + \frac{\eta^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \left.\frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(\tau)\delta q(\tau')}\right|_{q=\mathcal{Q}^{(0)}} \mathcal{Q}^{(1)}(\tau)\mathcal{Q}^{(1)}(\tau') \\ &= S[\mathcal{Q}^{(0)}] + \frac{\eta^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \mathcal{Q}^{(1)}(\tau)\mathcal{D}_*\mathcal{Q}^{(1)}(\tau)\,, \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

ただし (2.6.14) と (C.0.17) を用いた．また第 2 項は

$$
\begin{aligned}
&S_{1\text{eff}}[\mathcal{Q}^{(0)}+\eta\mathcal{Q}^{(1)}] \\
&\simeq S_{1\text{eff}}[\mathcal{Q}^{(0)}]+\frac{\eta^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\{\mathcal{Q}^{(1)}(\tau)-\mathcal{Q}^{(1)}(\tau')\}\mathcal{J}(\tau-\tau') \\
&\quad\times\{\mathcal{Q}^{(0)}(\tau)-\mathcal{Q}^{(0)}(\tau')\} \\
&= S_{1\text{eff}}[\mathcal{Q}^{(0)}]-\eta^2\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\mathcal{Q}^{(1)}(\tau)\mathcal{D}_*\mathcal{Q}^{(1)}(\tau)\,,
\end{aligned}
\tag{7.3.15}
$$

ただし (7.3.6) を用いた．ゆえに

$$
B^{(0)}=S[\mathcal{Q}^{(0)}] \tag{7.3.16}
$$

は単一自由度系における跳返作用と同じものであり，

$$
B^{(1)}=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\mathcal{J}(\tau-\tau')\{\mathcal{Q}^{(0)}(\tau)-\mathcal{Q}^{(0)}(\tau')\}^2 \tag{7.3.17}
$$

は $\mathcal{O}(1)$ の正数である．また

$$
B^{(2)}=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\mathcal{Q}^{(1)}(\tau)\mathcal{D}_*\mathcal{Q}^{(1)}(\tau)\,. \tag{7.3.18}
$$

したがって，双一次調和環境中に置かれた巨視系の崩壊率 Γ に対する環境の影響のうち，最も重要な効果は次式(**Caldeira-Leggett の公式**)のようにまとめられる．

$$
\Gamma\propto\Gamma^{(0)}\exp(-B^{(1)}\eta/h)\,, \tag{7.3.19}
$$

ただし，孤立した巨視系における崩壊率 (2.4.5) を $\Gamma^{(0)}$ と書いた．つまり，環境との相互作用 $\hat{H}_{\mathcal{SE}}$（式 (5.1.11)）により，崩壊は抑制される．“相互作用 $-\sum_\alpha \omega_\alpha^2 f_\alpha(\hat{q})\hat{x}_\alpha$” といわずに相互作用 $\hat{H}_{\mathcal{SE}}$ と断った理由は，第 5.6 節の最後に述べた通りである．環境の影響が η という形で現れたが，これを “摩擦の効果” もしくは “散逸効果” と呼ぶことは必ずしも当を得ない．その理由は前章と同様である．

7.4 有限温度における崩壊率について

第 2.3 節の図 2.7 に描かれた実線（もしくは一点鎖線）の正確な形を知るには，有限温度における崩壊理論が必要である．しかし残念ながら，きちんと基礎付けられた理論は存在しないようである．“任意の温度における崩壊率 Γ^β” とし

て次式がしばしば用いられる．

$$\Gamma^{\beta} \sim \omega_0 \exp\{-S_{\beta}[\mathcal{Q}^{\beta}, \chi^{\beta}]/h\}. \tag{7.4.1}$$

ただし $S_{\beta}[q,x]$ は，周期境界条件を満たす函数の空間

$$\mathcal{F}_{\beta} := \{(q,x) \mid q(-\beta h/2) = q(\beta h/2),\ x(-\beta h/2) = x(\beta h/2)\} \tag{7.4.2}$$

の上で定義される**温度 β^{-1} における Euclid 作用汎函数**であり，$S[q,x]$ にて τ 積分の範囲を $(-\beta h/2,\ \beta h/2)$ に変えたものである．また $(\mathcal{Q}^{\beta}, \chi^{\beta})$ はその停留点である*2．しかしながら，公式 (7.4.1) の "導出" には様々の問題点がある．これについても，機会があれば稿を改めて論じたい．

演習問題

7.1　$(N+1)$ 次元配位空間におけるポテンシャル（(7.2.4) の符号を逆にしたもの，ただし $V=V^{\mathrm{SBS}}$）の等高線を描き，準安定状態がどのように崩壊するか推定せよ．

7.2　環境周波数分布函数 (5.3.7) にて $\nu_{\mathrm{c}} \neq 0$ の場合，式 (7.2.35) はどのように変更されるか．

7.3　$\mathcal{Q}(\tau)$ が偶函数であること，したがって (7.2.22) により $x_{\alpha}(\tau)$ もまた然りであることを証明せよ．

7.4　(1) Green 函数 $\mathcal{G}_{*}(\tau,\tau')$ を具体的に求めて $\mathcal{Q}^{(1)}$ を $\mathcal{Q}^{(0)}$ と $\dot{\mathcal{Q}}^{(0)}$ で表せ．

(2) $V=V^{\mathrm{SBS}}$ かつ Ohm 型環境の場合に，(7.2.35) を用いて $\mathcal{Q}^{(1)}$ を計算せよ．

7.5　$\mathcal{Q}$ が求められれば，(7.2.21) から χ が得られる．

$$\chi_{\alpha}(\tau) = \eta^{1/2}\{\chi_{\alpha}^{(0)}(\tau) + \eta\chi_{\alpha}^{(1)}(\tau) + \eta^2\chi_{\alpha}^{(2)}(\tau) + \cdots\}. \tag{7.4.3}$$

特に双一次模型においては

$$\chi_{\alpha}^{(n)}(\tau) = \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{\alpha}\omega_{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-\omega_{\alpha}|\tau-\tau'|}\mathcal{Q}^{(n)}(\tau). \tag{7.4.4}$$

$V=V^{\mathrm{SBS}}$ の場合に $\chi_{\alpha}^{(0)}(\tau)$ を求めよ．

問 7.1 の等高線図に跳返の軌跡を描け．

7.6　$V=V^{\mathrm{SBS}}$ かつ Ohm 型環境の場合に $B^{(1)}, B^{(2)}$ を計算せよ．

---

*2　$S_{\beta}[q,x]$ の停留点は一意的でない．$X^{\beta} \equiv (\mathcal{Q}^{\beta}, \chi^{\beta})$ が停留点なら，勝手な c に対し $X_c^{\beta}(\tau) := X^{\beta}(\tau - c)$ で定義される X_c^{β} もまた停留点である．しかし $S_{\beta}[X_c^{\beta}]$ は c に依存しない．したがって，無数の停留点のうち一つを X^{β} として採り，これを用いて $S_{\beta}[X^{\beta}]$ を計算すればよい．

8

一般的環境と調和環境

第5章で調和環境を導入し，第6–7章でMQC・MQTに対するその影響を調べた．調和環境は，巨視系の古典的運動における摩擦を再現することができ，かつ，量子論的運動に対しては散逸・位相攪乱の両効果をもたらすことが示された．というわけで，なかなかもっともらしい環境模型である．しかし，現実の巨視系を取り巻く環境の模型として，どの程度まで調和環境が妥当であろうか．現実の環境は複雑であり，その素性はよく分からないことが多い．素性をほとんど知らずして，調和環境近似の妥当性を云々できるであろうか．本章では，一般的な環境を調和環境で置き換え得るための条件について考察する．

8.1 Born-Oppenheimer 型基底系

巨視的自由度 R（およびそれに共役な運動量 P）が D 個の成分からなるとする．

$$R \equiv \{R_a \mid a = 1, 2, \cdots, D\}, \quad P \equiv \{P_a \mid a = 1, 2, \cdots, D\}, \tag{8.1.1}$$

$$[\hat{R}_a, \hat{P}_b] = i\hbar\delta_{ab} \, . \tag{8.1.2}$$

一方，環境は N 個の自由度からなるものとし，その正準変数を ξ, π と書く．

$$\xi \equiv \{\xi_k \mid k = 1, 2, \cdots, N\}, \quad \pi \equiv \{\pi_k \mid k = 1, 2, \cdots, N\}, \tag{8.1.3}$$

$$[\hat{\xi}_k, \hat{\pi}_{k'}] = i\hbar\delta_{kk'}. \tag{8.1.4}$$

環境と巨視系の相互作用に関して全く何の情報もなければ何ら議論はできない．

もっともらしい前提として，巨視系と環境を合わせた全系の Hamiltonian $\hat{H}_{全}$ が次の形であると仮定する.

仮定 $\mathcal{A}0$: 巨視系と環境の相互作用は巨視系運動量によらない.

$$\hat{H}_{全} = \hat{H}_{S}^{(0)} + \hat{H}^{(1)} , \tag{8.1.5}$$

$$\hat{H}_{S}^{(0)} \equiv \frac{1}{2M}\hat{P}^2 + U^{(0)}(\hat{R}) , \tag{8.1.6}$$

$$\hat{H}^{(1)} \equiv U^{(1)}(\hat{\xi}, \hat{\pi}, \hat{R}) , \tag{8.1.7}$$

ただし M は正定数，$U^{(0)}(R)$ と $U^{(1)}(\xi, \pi, R)$ は勝手な函数，また

$$\hat{P}^2 \equiv \sum_a \hat{P}_a^2 . \tag{8.1.8}$$

この仮定が正しいかどうかについては，個々の系ごとに当たってみる他はない.

以下，Born-Oppenheimer 近似において使われる考え方にならって $\hat{H}^{(1)}$ を処理する*1．そのためには位置表現を用いると都合がよい．一般に演算子 $\hat{A}$ の位置表現を A と書くことにする．したがって

$$H^{(1)} = U^{(1)}\left(\xi, \frac{\hbar}{i}\nabla_\xi, R\right) . \tag{8.1.9}$$

R を固定すれば，$H^{(1)}$ は環境のみに対する Hamiltonian である．その正規直交固有函数系を

$$\{\chi_{\nu,R}(\xi) \mid \nu \in \boldsymbol{N}\} \tag{8.1.10}$$

とし，対応するエネルギー固有値 $\mathcal{E}_{\nu,R}$ を大きさの順に並べる.

$$\mathcal{E}_{0,R} < \mathcal{E}_{1,R} < \mathcal{E}_{2,R} < \cdots , \tag{8.1.11}$$

$$H^{(1)}\chi_{\nu,R}(\xi) = \mathcal{E}_{\nu,R}\chi_{\nu,R}(\xi) . \tag{8.1.12}$$

各 R に対し，(8.1.10) は正規直交完全系をなす*2.

$$\int d\xi \chi_{\mu,R}^*(\xi)\chi_{\nu,R}(\xi) = \delta_{\mu\nu}, \tag{8.1.13}$$

$$\sum_\nu \chi_{\nu,R}(\xi)\chi_{\nu,R}^*(\xi') = \delta(\xi - \xi') , \tag{8.1.14}$$

ただし

---

*1　ただし本節の議論は近似を含まない.

*2　以下，連続固有値に対しては Kronecker デルタを Dirac デルタで置き換えるものとする.

$$\int d\xi \equiv \prod_k \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_k \ , \quad \delta(\xi - \xi') \equiv \prod_k \delta(\xi_k - \xi'_k) \, . \tag{8.1.15}$$

ここで，ポテンシャル $U^{(0)}(R)$ に $\mathcal{E}_{0,R}$ を付け加えたものを改めて巨視系ポテンシャル $U(R)$ と名付ける[*3]．

$$U(R) := U^{(0)}(R) + \mathcal{E}_{0,R} \ , \tag{8.1.16}$$

$$\hat{H}_{\mathcal{S}} := \hat{H}_{\mathcal{S}}^{(0)} + \mathcal{E}_{0,\hat{R}} = \frac{1}{2M}\hat{P}^2 + U(\hat{R}) \, . \tag{8.1.17}$$

$\hat{H}_{\mathcal{S}}$ の固有状態系を

$$\{|n\rangle \mid n \in \mathbf{N}\} \ , \quad \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'} \tag{8.1.18}$$

とし，$|n\rangle$ を表す波動函数を $\psi_n(R)$ と書く．

$$\psi_n(R) \equiv \langle R|n\rangle \, . \tag{8.1.19}$$

巨視系の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ は (8.1.18) で張られる．

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}pan\{|n\rangle \mid n \in \mathbf{N}\} \, . \tag{8.1.20}$$

つまり

$$\int dR \psi_m^*(R) \psi_n(R) = \delta_{mn} \ , \tag{8.1.21}$$

$$\sum_n \psi_n(R) \psi_n^*(R') = \delta(R - R') \ , \tag{8.1.22}$$

ただし

$$\int dR \equiv \prod_a \int_{-\infty}^{\infty} dR_a \ , \quad \delta(R - R') \equiv \prod_a \delta(R_a - R'_a) \, . \tag{8.1.23}$$

以上の準備を経て，全系に関する波動函数 $\Psi_{n\nu}(R, \xi)$ を定義する．

$$\Psi_{n\nu}(R, \xi) := \psi_n(R) \chi_{\nu,R}(\xi) \ . \tag{8.1.24}$$

これは正規直交完全系をなす．

$$\int\!\!\int dR d\xi \Psi_{m\mu}^*(R, \xi) \Psi_{n\nu}(R, \xi) = \delta_{mn} \delta_{\mu\nu} \ , \tag{8.1.25}$$

$$\sum_{n\nu} \Psi_{n\nu}(R, \xi) \ \Psi_{n\nu}^*(R', \xi') = \delta(R - R') \delta(\xi - \xi') \ . \tag{8.1.26}$$

函数系 $\{\Psi_{n\nu}(R, \xi) \mid n, \nu \in \mathbf{N}\}$ を **Born-Oppenheimer 型基底系**と呼ぶ．これは通常の **Born-Oppenheimer 基底系**と若干異なるので型と断った．本節の

[*3] $U(R)$ は，（環境が基底状態 $\chi_{0,R}$ にある場合の）**断熱ポテンシャル**と呼ばれる．

目的にはこの基底系の方が便利である．

8.2 Hamiltonian の Born-Oppenheimer 型表現

Born-Oppenheimer 型基底系に関する $\hat{H}_{全}$ の行列要素を計算しよう．まず

$$H_{\mathcal{S}}^{(0)}\Psi_{n\nu}(R,\xi) = \{H_{\mathcal{S}}^{(0)}\psi_n(R)\}\chi_{\nu,R}(\xi) + \Phi_{n\nu}^{(1)}(R,\xi) + \Phi_{n\nu}^{(2)}(R,\xi)\,, \tag{8.2.1}$$

$$\Phi_{n\nu}^{(1)}(R,\xi) \equiv -\frac{\hbar^2}{M}(\nabla_R\psi_n(R))\cdot(\nabla_R\chi_{\nu,R}(\xi))\,, \tag{8.2.2}$$

$$\Phi_{n\nu}^{(2)}(R,\xi) \equiv -\frac{\hbar^2}{2M}\psi_n(R)\nabla_R^2\chi_{\nu,R}(\xi)\,, \tag{8.2.3}$$

$$H^{(1)}\Psi_{n\nu}(R,\xi) = \psi_n(R)H^{(1)}\chi_{\nu,R}(\xi)\,. \tag{8.2.4}$$

ゆえに，(8.1.12) を用いて

$$H_{全}\Psi_{n\nu}(R,\xi) = \{(H_{\mathcal{S}}^{(0)} + \mathcal{E}_{\nu,R})\psi_n(R)\}\chi_{\nu,R}(\xi) + \Phi_{n\nu}^{(1)}(R,\xi) + \Phi_{n\nu}^{(2)}(R,\xi)\,. \tag{8.2.5}$$

右辺第 1 項を (8.1.17) を用いて書き直せば

$$\begin{aligned} H_{m\mu,n\nu} &:= \iint dR d\xi \Psi_{m\mu}^*(R,\xi) H_{全}\Psi_{n\nu}(R,\xi) \\ &= \delta_{\mu\nu}\int dR\ \psi_m^*(R)\{H_{\mathcal{S}} + \mathcal{E}_{\nu 0}(R)\}\psi_n(R) + \mathcal{V}_{m\mu,n\nu}^{(1)} + \mathcal{V}_{m\mu,n\nu}^{(2)}\ , \end{aligned} \tag{8.2.6}$$

$$\mathcal{E}_{\nu 0}(R) := \mathcal{E}_{\nu,R} - \mathcal{E}_{0,R}\ , \tag{8.2.7}$$

$$\mathcal{V}_{m\mu,n\nu}^{(\sigma)} := \iint dR d\xi \Psi_{m\mu}^*(R,\xi)\Phi_{n\nu}^{(\sigma)}(R,\xi)\,. \tag{8.2.8}$$

これを見やすくすべく，**Born-Oppenheimer 型有効ヴェクトルポテンシャル** $\{\boldsymbol{A}(R)\}_{\mu\nu}$ を導入する．

$$\{\boldsymbol{A}(R)\}_{\mu\nu} := -\int d\xi \chi_{\mu,R}^*(\xi)\frac{\hbar}{i}\nabla_R\chi_{\nu,R}(\xi)\,. \tag{8.2.9}$$

右辺の ∇_R は R に関する微分であって ∇_ξ ではないことに注意しておく．$\{\boldsymbol{A}(R)\}_{\mu\nu}$ は ∇_R と同じく D 成分ヴェクトルである．その a 番目の成分を $\{A_a(R)\}_{\mu\nu}$ と書く．また，これを μ 行 ν 列要素とする行列を $A_a(R)$，そして

$A_a(R)$ を第 a 成分とするヴェクトルを $\boldsymbol{A}(R)$ と書くことにすれば，次の性質が成り立つ．

$$\{\boldsymbol{A}(R)\}^{\dagger} = \boldsymbol{A}(R), \tag{8.2.10}$$

$$\{A_a(R)A_b(R)\}_{\mu\nu} = \hbar^2 \int d\xi (\partial_a \chi^*_{\mu,R}(\xi))(\partial_b \chi_{\nu,R}(\xi)). \tag{8.2.11}$$

ただし $\dagger$ は行列の Hermite 共役を表し，

$$\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial R_a}. \tag{8.2.12}$$

次の恒等式が後で役に立つ．

$$-\hbar^2 \int d\xi \chi^*_{\mu,R}(\xi) \nabla^2_R \, \chi_{\nu,R}(\xi) = \{(\boldsymbol{A}(R))^2\}_{\mu\nu} - \frac{\hbar}{i}\{\nabla_R \cdot \boldsymbol{A}(R)\}_{\mu\nu}. \tag{8.2.13}$$

これを示すには，

$$\chi^*_{\mu,R}(\xi)\nabla^2_R \chi_{\nu,R}(\xi) = -(\nabla_R \chi^*_{\mu,R}(\xi))\cdot(\nabla_R \chi_{\nu,R}(\xi)) + \nabla_R\{\chi^*_{\mu,R}(\xi)\nabla_R \chi_{\nu,R}(\xi)\} \tag{8.2.14}$$

を ξ で積分したあと，(8.2.9) と (8.2.11) を使えばよい．

以下，次の記法を用いる．R の勝手な函数 $\psi(R)$ に対し，

$$(\nabla_R \cdot \boldsymbol{A}(R))\psi(R) = \{\nabla_R \cdot \boldsymbol{A}(R) - \boldsymbol{A}(R)\cdot\nabla_R\}\psi(R). \tag{8.2.15}$$

左辺の ∇_R が $\boldsymbol{A}(R)$ のみに作用する（そのことを括弧で印した）のに対し，右辺冒頭の ∇_R は $\boldsymbol{A}(R)\psi(R)$ 全体に作用する．これを用いると $\mathcal{V}^{(\sigma)}_{m\mu,n\nu}$ が簡潔な形に書かれる．

$$\mathcal{V}^{(1)}_{m\mu,n\nu} + \mathcal{V}^{(2)}_{m\mu,n\nu} = \frac{1}{2M}\int dR \psi^*_m(R)\left\{-\frac{\hbar}{i}(\nabla_R \cdot \boldsymbol{A}(R) + \boldsymbol{A}(R)\cdot\nabla_R) + (\boldsymbol{A}(R))^2\right\}_{\mu\nu}\psi_n(R).$$

これを (8.2.6) と合わせて

$$H_{m\mu,n\nu} = \int dR \psi^*_m(R)\left\{\frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla_R - \boldsymbol{A}(R)\right)^2 + U(R) + \mathcal{E}_{\nu 0}(R)\right\}_{\mu\nu}\psi_n(R). \tag{8.2.16}$$

さて，新たに Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ を導入する．

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} := \mathcal{S}pan\{|\nu\rangle \,|\, \nu \in \mathbf{N}\}, \quad \langle\mu|\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}. \tag{8.2.17}$$

この $|\nu\rangle$ は (8.1.18) の $|n\rangle$ などとは無関係である．次に，$\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ 上の演算子 $\hat{\boldsymbol{A}}(R)$, $\hat{H}_{\mathcal{E}}(R)$ を次式で定義する．

$$\hat{\boldsymbol{A}}(R) := \sum_{\mu\nu} |\mu\rangle\{\boldsymbol{A}(R)\}_{\mu\nu}\langle\nu|, \tag{8.2.18}$$

$$\hat{H}_{\mathcal{E}}(R) := \sum_{\nu} |\nu\rangle\mathcal{E}_{\nu 0}(R)\langle\nu|. \tag{8.2.19}$$

また，

$$|n,\nu\rangle\rangle := |n\rangle|\nu\rangle \tag{8.2.20}$$

とおけば，直積空間 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}\otimes\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ はこれによって張られる．

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\mathcal{S}}\otimes\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathcal{S}pan\{|n,\nu\rangle\rangle \,|\, n,\nu \in \mathbf{N}\}. \tag{8.2.21}$$

以上の記法を用いると，

$$\begin{aligned} H_{m\mu,n\nu} &= \int dR\psi_m^*(R)\left\langle\mu\left|\left\{\frac{1}{2M}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla_R - \hat{\boldsymbol{A}}(R)\right)^2 + U(R) + \hat{H}_{\mathcal{E}}(R)\right\}\right|\nu\right\rangle\psi_n(R) \\ &= \langle\langle m,\mu|\hat{H}|n,\nu\rangle\rangle, \end{aligned} \tag{8.2.22}$$

ただし

$$\hat{H} := \frac{1}{2M}(\hat{P} - \hat{\boldsymbol{A}}(\hat{R}))^2 + U(\hat{R}) + \hat{H}_{\mathcal{E}}(\hat{R}). \tag{8.2.23}$$

$\hat{\boldsymbol{A}}(\hat{R})$ は，$\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ 上の演算子 $\hat{\boldsymbol{A}}(R)$ に含まれる R に $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ 上の演算子 $\hat{R}$ を代入したものであって，$\mathcal{H}$ 上の演算子である．$\hat{H}_{\mathcal{E}}(\hat{R})$ についても同様．かくて，(8.1.5) で与えられる $\hat{H}_{全}$ による記述は，Hilbert 空間 (8.2.21) 上の演算子 $\hat{H}$ (式 (8.2.23)) による記述と等価であることが分かった．以上は，近似を含まない正確な形式論である．

以下，環境の基底状態のことを特に $|\mathrm{vac}\rangle$ と書く．

$$|\mathrm{vac}\rangle \equiv |\nu\rangle_{\nu=0}. \tag{8.2.24}$$

そして，$|\mathrm{vac}\rangle$ 以外の状態の名を α と付け替える．

$$\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = \mathcal{S}pan\ \{|\mathrm{vac}\rangle,\ |\alpha\rangle \ |\ \alpha = 1, 2, \cdots\}. \tag{8.2.25}$$

8.3　Caldeira-Leggett 仮定

一連の仮定(**Caldeira-Leggett 仮定**)を導入しよう．

仮定 $\mathcal{A}1$: $\mathcal{E}_{\alpha 0}(R)$ は R によらない．

$$\mathcal{E}_{\alpha 0}(R) = \hbar\omega_\alpha,\ \omega_\alpha \text{ は正定数}. \tag{8.3.1}$$

仮定 $\mathcal{A}2$: $\{\boldsymbol{A}(R)\}_{00}=0$.

仮定 $\mathcal{A}3$: $|\{\boldsymbol{A}(R)\}_{\alpha\beta}| \ll |\{\boldsymbol{A}(R)\}_{0\alpha}|$.

仮定 $\mathcal{A}4$: 環境の初期状態は基底状態 $|\mathrm{vac}\rangle$ であるとしてよい．

仮定 $\mathcal{A}5$: 全系の時間発展を追う際に，$\{\boldsymbol{A}(R)\}_{\alpha\beta}$ は無視してよい．

仮定 $\mathcal{A}2$ は，環境の基底状態が縮退していなければ自動的に正しい．$\mathcal{A}5$ は $\mathcal{A}3 \wedge \mathcal{A}4$ が成り立てば正しかろう．$\mathcal{A}1, \mathcal{A}3, \mathcal{A}4$ については，個々の系について詳しく検討せずしてその妥当性をただちに判断することはできない．

仮に上記の諸仮定を認めるとしよう．すると

$$\hat{\boldsymbol{A}}(R) \simeq \sum_\alpha \{\boldsymbol{A}(R)\}_{\alpha 0}|\alpha\rangle\langle\mathrm{vac}| + \mathrm{h.c.}\ . \tag{8.3.2}$$

したがって，$\hat{H}$ に含まれる環境演算子は

$$|\alpha\rangle\langle\alpha|,\quad |\alpha\rangle\langle\mathrm{vac}|,\quad |\mathrm{vac}\rangle\langle\alpha| \tag{8.3.3}$$

という 3 種に限られる．形式的に

$$\hat{b}_\alpha \equiv |\mathrm{vac}\rangle\langle\alpha|,\quad \hat{b}_\alpha^\dagger \equiv |\alpha\rangle\langle\mathrm{vac}| \tag{8.3.4}$$

と置き，質量の次元を持つ勝手な正定数 m_α を導入して

$$\boldsymbol{A}_\alpha(R) := \frac{1}{i}\left(\frac{2}{\hbar m_\alpha\omega_\alpha}\right)^{1/2}\{\boldsymbol{A}(R)\}_{\alpha 0} \tag{8.3.5}$$

と書けば[*4]，

$$\hat{\boldsymbol{A}}(R) \simeq \sum_\alpha \boldsymbol{A}_\alpha(R)\,\hat{p}_\alpha, \tag{8.3.6}$$

$$\hat{H}_{\mathcal{E}}(R) \simeq \hat{H}_{\mathcal{E}} \equiv \sum_\alpha \hbar\omega_\alpha \hat{b}_\alpha^\dagger \hat{b}_\alpha, \tag{8.3.7}$$

ただし

$$\hat{p}_\alpha := \frac{1}{i}\left(\frac{\hbar m_\alpha\omega_\alpha}{2}\right)^{1/2}(\hat{b}_\alpha - \hat{b}_\alpha^\dagger). \tag{8.3.8}$$

ゆえに

$$\hat{H} \simeq \hat{H}_{\mathrm{CL1}}$$

---

*4 以下簡単のため，上式右辺は実数であるとする（さもなくば上 2 式の右辺に適当な位相因子を掛けておけばよい）．

$$\equiv \frac{1}{2M}\left\{\hat{P}-\sum_{\alpha}\boldsymbol{A}_{\alpha}(\hat{R})\hat{p}_{\alpha}\right\}^{2}+U(\hat{R})+\sum_{\alpha}\hbar\omega_{\alpha}\hat{b}_{\alpha}^{\dagger}\hat{b}_{\alpha}\ . \qquad (8.3.9)$$

$\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\alpha^\dagger$ は (8.3.4) で定義したものであって，Bose 交換関係に従う演算子ではないことに注意．さらに二つの仮定を導入する．

仮定 $\mathcal{A}6$: (8.3.9) にて $\hat{b}_\alpha$ を Bose 演算子とみなしてよい．

$$[\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\beta^\dagger] \simeq \delta_{\alpha\beta}\ . \qquad (8.3.10)$$

これは大胆な仮定である．これを認めると，例えば

$$\hat{b}_\alpha^\dagger \hat{b}_\beta^\dagger |\mathrm{vac}\rangle \qquad (8.3.11)$$

などという状態 (Bose 粒子の多重励起状態) が現れるが，(8.3.11) に対応する状態は $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ には存在しない．“$\mathcal{A}4$ が正しくて，かつ環境効果が弱ければ，多重励起状態は最終結果には利かないであろう”という期待が妥当であれば，$\mathcal{A}6$ は正当化されよう．

仮定 $\mathcal{A}7$: Born-Oppenheimer 型有効ヴェクトルポテンシャルはスカラーポテンシャルから導かれる[*5]．つまり，

$$\boldsymbol{A}_\alpha(R) = \nabla_R f_\alpha(R) \qquad (8.3.12)$$

を満たす函数 $f_\alpha(R)$ が存在する．この仮定は，R が 1 成分ならば常に正しいが，一般には必ずしも成立しない．仮定 $\mathcal{A}6 \wedge \mathcal{A}7$ を認めれば，

$$\hat{\mathcal{U}} := \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_\alpha f_\alpha(\hat{R})\hat{p}_\alpha\right) \qquad (8.3.13)$$

を用いて

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{CL2}} &:= \hat{\mathcal{U}}^\dagger \hat{H}_{\mathrm{CL1}} \hat{\mathcal{U}} \\ &= \frac{1}{2M}\hat{P}^2 + U(\hat{R}) \\ &\quad + \sum_\alpha \left[\frac{1}{2m_\alpha}\hat{p}_\alpha^2 + \frac{1}{2}m_\alpha\omega_\alpha^2\{\hat{x}_\alpha - f_\alpha(\hat{R})\}^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega_\alpha\right], \qquad (8.3.14)\end{aligned}$$

$$\hat{x}_\alpha := \left(\frac{\hbar}{2m_\alpha\omega_\alpha}\right)^{1/2}(\hat{b}_\alpha + \hat{b}_\alpha^\dagger)\,. \qquad (8.3.15)$$

つまり $\hat{H}_{\mathrm{CL1}}$ は $\hat{H}_{\mathrm{CL2}}$ とユニタリー同値である．後者は第 5 章の出発点の Hamil-

---

*5　“exact である”といわれる．

tonian (5.1.1) に他ならない．

(8.1.5) から出発して最終結果 (8.3.14) に至るまでに多数の仮定が導入された．調和環境模型がどの程度まで一般的といえるか，その判断は読者に委ねる．ひとつ強調しておくべきことは，一般に (8.1.5) は調和環境模型とは似ても似つかぬ形をしているということである．多自由度系において巨視的自由度 R を選別し，残りの大衆自由度を ξ と書いた結果が (8.1.5) であるから，ξ は電子系を表していたりスピン系を表していたり，種々の場合があり得る．本章で紹介した一連の変形 (これを**<u>Born-Oppenheimer 型処理</u>**と呼ぶ) を経て初めて，(8.3.14) に帰着される可能性が生ずるのである．よって，(8.1.7) を見ただけで調和環境模型は妥当でないと速断するのは誤りである．いま述べたことを図式的にまとめておこう．

多自由度系

↓

巨視的自由度と環境自由度の仕分け

|

Born-Oppenheimer 型処理

↓ ?

調和環境模型

第 5–7 章では，ともかく Hamiltonian(5.1.1) が与えられた，として議論した．もし本章の立場に立つならば，Hamiltonian のみならず環境の初期状態も $|\mathrm{vac}\rangle$ と指定されていることになる．とすると，以下の点に注意すべきである．方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle\rangle = \hat{H}_{\mathrm{CL1}}|\Psi(t)\rangle\rangle \tag{8.3.16}$$

をユニタリー変換すると

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\widetilde{\Psi(t)\rangle\rangle} = \hat{H}_{\mathrm{CL2}}|\widetilde{\Psi(t)\rangle\rangle}\ , \quad |\widetilde{\Psi(t)\rangle\rangle} \equiv \hat{\mathcal{U}}^{\dagger}|\Psi(t)\rangle\rangle\ . \tag{8.3.17}$$

これに伴い，上述の初期条件

$$|\Psi(0)\rangle\rangle = |\psi, \mathrm{vac}\rangle\rangle \equiv |\psi\rangle|\mathrm{vac}\rangle \tag{8.3.18}$$

も変換されなければならない.

$$|\widetilde{\Psi(0)}\rangle\rangle = \hat{\mathcal{U}}^\dagger|\psi, \mathrm{vac}\rangle\rangle\,. \qquad (8.3.19)$$

右辺は (6.4.13) の形の縺状態である. これに対し，第6章では簡単のため

$$|\widetilde{\Psi(0)}\rangle\rangle = |\psi, \mathrm{vac}\rangle\rangle \qquad (8.3.20)$$

を採用した. いずれを採用すべきか，それは調和環境模型の位置付けとも密接に関わる問題である.

演習問題

8.1　Born-Oppenheimer 基底系 $\{\Psi^{\mathrm{BO}}_{n\nu}(R,\xi)\,|\,n,\nu\in\mathbf{N}\}$ は次式で定義される.

$$\Psi^{\mathrm{BO}}_{n\nu}(R,\xi) := \psi^{(\nu)}_n(R)\chi_{\nu,R}(\xi)\,, \qquad (8.3.21)$$

ただし $\{\psi^{(\nu)}_n(R)\,|\,n\in\mathbf{N}\}$ は，“環境が第 ν 状態にある場合の巨視系 Hamiltonian”

$$H^{(0)}_{\mathcal{S}} + \mathcal{E}_{\nu,R} \qquad (8.3.22)$$

の正規直交固有函数系である. これは当然 ν による. ここが Born-Oppenheimer 型基底系との違いである. 一般には $\mathcal{E}_{\nu,R}$ の R 依存性が ν によって大きく異なるから，Born-Oppenheimer 基底系が用いられる. これに対し，仮定 $\mathcal{A}1$ が近似的に成り立つ場合には Born-Oppenheimer 型基底系を使うと見通しがよいというわけである.

（1）(8.3.21) が正規直交完全系をなすことを示せ.

（2）Born-Oppenheimer 基底系を使って本章の議論を繰り返してみよ（あまりうまく行かないであろう）.

8.2　状態 (8.3.19) の性質を調べよ.

8.3　Hamiltonian(8.3.9) を用いて量子共鳴振動を論ぜよ. ただし $\hat{b}_\alpha$ は Bose 演算子ではなく，(8.3.4) で定義される演算子である.

あるいは正確な Hamiltonian(8.2.23) から出発したらどうなるか.

9 月夜の猫

量子力学が現在の物理学的認識の基本枠組であることは万人の認めるところであろう．超微から超巨まで，実験的検証の可能性をはるかに超えた気の遠くなるような外挿理論さえ，この枠組内で論じられている．にもかかわらず，これを究極の土俵として受け入れることにはためらいが残る．猫問題が存在するからである．第1章で述べたように，猫問題は量子力学と巨視的実在論の相克である．本章では，この対立に決着をつけるべく，Einstein の月明かりに照らして猫を実験の俎上に載せる方策を論ずる．

9.1 巨視的実在論

準備として MR(macrorealism: 巨視的実在論) の内容を明確にしておこう．MR とは，以下の二つの仮定($\mathcal{MRA}1, \mathcal{MRA}2$)を認める認識論的立場である[*1]．

$\mathcal{MRA}$ 1: 巨視的確定性 (macroscopic definiteness) の仮定

巨視系の状態として，互いに巨視的可峻別な複数の状態 $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots\}$ が考えられる場合，当該巨視系は，観測されるか否かにかかわらず常に，$\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \cdots\}$ のうちのいずれか一つの状態に存在する．

$\mathcal{MRA}$ 2: 無侵襲可測性[*2] (non-invasive measurability) の仮定

巨視系の状態を確定すべく行われる測定過程が当該巨視系のその後の振る舞いに及ぼす影響は，原理的にいくらでも小さくされ得る(もしくは，原理的に計算によって補正され得る)．

---

*1 以下，これをもって MR の定義とする．

*2 non-invasive の訳語としての無侵襲は次書より借用：篠本滋: 脳のデザイン，岩波書店 (1996)．

QM(quantum mechanics：量子力学) は一般に $\mathcal{MRA}1, \mathcal{MRA}2$ のいずれをも認めない．“観測されれば，いずれか一つの状態に見出される” というのは経験事実(もしくは “観測” の定義)であって，QM も当然これを認める．これに対し，$\mathcal{MRA}1$ の主張の要点が**観測されるか否かにかかわらず**という部分にあることはいうまでもない．

9.2　Leggett-Garg 不等式

仮に量子共鳴振動とおぼしき現象が観察されたとしよう．これでただちに MR を否定し，QM に軍配を上げて “猫状態 (QIMDS) を確認した” と結論付けてよいであろうか．それは速断にすぎる．当該の振動現象は，“それを QM によって記述すれば猫状態が登場する” という意味で猫状態の存在を強く示唆するけれども，MR とも両立するかもしれない．

　実験結果が QM とは両立するけれども MR とは両立しない

と言えて初めて，猫状態の存在が立証されたことになる[*3]．そのような結論を下し得るための定量的な判定条件が必要である．

有名な Bell の不等式は，“QM とは両立するが LR(local realism：局所的実在論) とは両立しない” 現象の存在を指摘したものであり，そのような現象(Einstein-Podolsky-Rosen 相関)が実証されたことは周知の事実である[*4]．この Bell の故事にならい，QM と MR の対立に黒白を決すべき不等式が提案された．それが以下に述べる Leggett-Garg 不等式である．MR といっても何か具体的な理論を念頭に置いているわけではなく，$\mathcal{MRA}1 \wedge \mathcal{MRA}2$ を満たす理論なら何でもよい．そのような一類の理論全体を一括して QM および実験と定量的に付き合わせようというわけである．なお Leggett-Garg 不等式は，MR の破れを実証することには使えても，QM の破れの実証には役立たない．これらの事情は LR に関する Bell 不等式の場合と同様である．

巨視系の状態として，巨視的可峻別な二つの状態 $\mathcal{S}_{\pm}$（例えば，対称二連井戸

＊3　一応，QM の対抗馬としては MR 以外にないものと考える．

＊4　例えば N. D. Mermin, *Boojums All The Way Through*, Cambridge University Press (1990), Sect. 12.

の右井戸底と左井戸底)が考えられるとする．これらを識別する変数 $q(t)$ が存在して，状態 $\mathcal{S}_\pm$ はそれぞれ $q(t)=\pm 1$ に対応するものとする．簡単のため，ある 4 個の時点 $t_4>t_3>t_2>t_1$ に着目する．MR が成立すると仮定し，$\mathcal{MRA}1$ を認めると*5

$$q(t_j)=+1 \text{ または } -1 \ : \ j\in\{4,3,2,1\} \ . \tag{9.2.1}$$

したがって，$\{q(t_4),q(t_3),q(t_2),q(t_1)\}=\{\sigma_4,\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1\}$ となる**結合確率** (joint probability) $\mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma_3 t_3|\sigma_2 t_2|\sigma_1 t_1)$ を考えることが許される．この結合確率は以下の 2 性質を持つはずである．

$$\mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma_3 t_3|\sigma_2 t_2|\sigma_1 t_1)\geqq 0 \ , \tag{9.2.2}$$

$$\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}\mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma_3 t_3|\sigma_2 t_2|\sigma_1 t_1)=1 \ . \tag{9.2.3}$$

もちろん，$\sigma_j\ (j=1\sim 4)$ は $+1$ または -1 である．これに基づき，変数 $q(t)$ の時間相関函数を次式で定義することができる．すなわち，任意の対 (j,i) に対し

$$C_{ji}^{\mathrm{MR}}:=\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}\sigma_j\sigma_i\ \mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma_3 t_3|\sigma_2 t_2|\sigma_1 t_1)\ :\ 4\geqq j>i\geqq 1\ . \tag{9.2.4}$$

この相関函数は以下の **Leggett-Garg 不等式**($\mathcal{LG}1-\mathcal{LG}3$)を満たす.

$$\mathcal{LG}1:\ \mathcal{K}_1\equiv|C_{32}^{\mathrm{MR}}-C_{31}^{\mathrm{MR}}|+C_{21}^{\mathrm{MR}}\leqq 1\ , \tag{9.2.5}$$

$$\mathcal{LG}2:\ \mathcal{K}_2\equiv-(C_{32}^{\mathrm{MR}}+C_{21}^{\mathrm{MR}}+C_{31}^{\mathrm{MR}})\leqq 1\ , \tag{9.2.6}$$

$$\mathcal{LG}3:\ -1\leqq\mathcal{K}_3\equiv\frac{1}{2}(C_{43}^{\mathrm{MR}}+C_{32}^{\mathrm{MR}}+C_{21}^{\mathrm{MR}}-C_{41}^{\mathrm{MR}})\leqq 1\ . \tag{9.2.7}$$

証明は数学的には Bell の不等式の場合と同様である.

［証明］ 準備として 2 値変数に関する補助不等式を導く．σ,σ',σ'' の値が $+1$ または-1 であるとすれば

$$|\sigma\sigma''+\sigma'\sigma''|=|\sigma\sigma''(1+\sigma\sigma')|=1+\sigma\sigma'\ . \tag{9.2.8}$$

この恒等式にて $(\sigma,\sigma',\sigma'')=(\sigma_1,\pm\sigma_2,\sigma_3)$ と置くと(以下，複号同順)

$$1\pm\sigma_1\sigma_2=|\sigma_1\sigma_3\pm\sigma_2\sigma_3|\ , \tag{9.2.9}$$

すなわち

---

*5 さしあたりの議論において必要なのは $\mathcal{MRA}1$ のみである．後で実験と対比する際に $\mathcal{MRA}2$ も必要となる.

$$1 \pm \sigma_2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_1 \pm \sigma_3\sigma_2 \geqq 0 \ , \tag{9.2.10}$$

$$1 \pm \sigma_2\sigma_1 - (\sigma_3\sigma_1 \pm \sigma_3\sigma_2) \geqq 0 \ . \tag{9.2.11}$$

また，$(\sigma, \sigma', \sigma'')$ を $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2)$ あるいは $(\sigma_1, -\sigma_3, \sigma_4)$ と置けば

$$|\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_2| = 1 + \sigma_1\sigma_3 \ , \tag{9.2.12}$$

$$|\sigma_1\sigma_4 - \sigma_3\sigma_4| = 1 - \sigma_1\sigma_3 \ . \tag{9.2.13}$$

したがって

$$|\sigma_3\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1| + |\sigma_4\sigma_3 - \sigma_4\sigma_1| = 2 \ , \tag{9.2.14}$$

$$-2 \leqq \sigma_3\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 \pm (\sigma_4\sigma_3 - \sigma_4\sigma_1) \leqq 2 \ . \tag{9.2.15}$$

これで準備終了．以下 $C_{ji} \equiv C_{ji}^{\mathrm{MR}}$ とし，(9.2.10) を使って

$$\begin{aligned} &1 \pm C_{21} + C_{31} \pm C_{32} \\ &\quad = \sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} (1 \pm \sigma_2\sigma_1 + \sigma_3\sigma_1 \pm \sigma_3\sigma_2)\mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma_3 t_3|\sigma_2 t_2|\sigma_1 t_1) \geqq 0 . \end{aligned} \tag{9.2.16}$$

これで $\mathcal{LG}2$ が示された．同様に (9.2.11) を用いて

$$1 \pm C_{21} - (C_{31} \pm C_{32}) \geqq 0 \ . \tag{9.2.17}$$

(9.2.16) と (9.2.17) を組み合わせれば

$$|C_{32} \pm C_{31}| \mp C_{21} \leqq 1 \ . \tag{9.2.18}$$

すなわち $\mathcal{LG}1$ が示された．ついでながら，添字は自由に入れ替えられるから，2 と 3 を入れ替えれば

$$|C_{32} \pm C_{21}| \mp C_{31} \leqq 1 \ . \tag{9.2.19}$$

最後に (9.2.15) から

$$-2 \leqq C_{32} + C_{21} \pm (C_{43} - C_{41}) \leqq 2 \ , \tag{9.2.20}$$

すなわち

$$C_{32} + C_{21} + |C_{43} - C_{41}| \leqq 2 \ , \tag{9.2.21}$$

$$-2 \leqq C_{32} + C_{21} - |C_{43} - C_{41}| \ . \tag{9.2.22}$$

ゆえに

$$|C_{32}+C_{21}|+|C_{43}-C_{41}| \leqq 2 \; . \qquad (9.2.23)$$

この左辺が $|2\mathcal{K}_3|$ より大きいことに注意すれば $\mathcal{LG}3$ が得られる．証明終．

9.3 実測可能な相関函数

実験的に決定できるのは以下の諸量である[*6]．

・$\mathcal{P}^{\mathrm{emp}}(\sigma t_i) \equiv$ “$q(t_i)=\sigma$ となる確率”

・$W^{\mathrm{emp}}(\sigma' t_j|\sigma t_i) \equiv$ “$q(t_i)=\sigma$ であったとして $q(t_j)=\sigma'$ となる条件付確率（つまり状態 $\mathcal{S}_\sigma$ から 状態 $\mathcal{S}_{\sigma'}$ への遷移確率)”

これらから，実験家は次の相関函数を算出することができる．

$$C_{ji}^{\mathrm{emp}} \; := \; \sum_{\sigma'\sigma} \sigma'\sigma \; W^{\mathrm{emp}}(\sigma' t_j|\sigma t_i)\mathcal{P}^{\mathrm{emp}}(\sigma t_i) \; . \qquad (9.3.1)$$

実験は巨視系の集団 (ensemble) に対してなされる[*7]．$\mathcal{MRA}2$ にいう無侵襲測定が実現されたとして，巨視系の集団を，無侵襲測定がなされた部分集団と，まだ全く測定がなされていない部分集団とに分けよう．“前者の統計的性質は後者の統計的性質と同じである” というのが測定の無侵襲性である．ここにいう統計的性質とは，もちろん，結合確率 $\mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma_3 t_3|\sigma_2 t_2|\sigma_1 t_1)$ を指す．つまり，$\mathcal{MRA}2$ を認めると，例えば

$$W^{\mathrm{emp}}(\sigma' t_3|\sigma t_2)\mathcal{P}^{\mathrm{emp}}(\sigma t_2) = \sum_{\sigma_4\sigma_1} \mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma' t_3|\sigma t_2|\sigma_1 t_1) \; . \qquad (9.3.2)$$

したがって，MR が正しいとすれば (9.2.4), (9.3.1), (9.3.2) より

$$C_{ji}^{\mathrm{emp}} = C_{ji}^{\mathrm{MR}} \; . \qquad (9.3.3)$$

QM においては，(9.3.2) のような式は成立しない．そもそも結合確率 $\mathcal{P}(\sigma_4 t_4|\sigma_3 t_3|\sigma_2 t_2|\sigma_1 t_1)$ なる概念を合理的に導入することができるかどうかとい

*6　上添字 emp は empirical の意．

*7　完全に同一の性質をもつ巨視系を多数用意する．あるいは，1 個の巨視系を繰り返し同じ状況に設定することにより実効的に集団を作ってもよい．

うこと*8 から考え直さねばならない．一般には導入不可能である．

9.4　量子力学的相関函数

簡単のため，状態 $\mathcal{S}_{\mp}$ は互いに対称的であるとする．具体的には対称二連井戸の左右それぞれの井戸における基底状態 $|\mp\rangle$ を念頭に置く．また，時間に関する並進対称性を仮定する*9．巨視系が初期に状態 $\mathcal{S}_-$ にあったとして，それから時間 t だけ後に状態 $\mathcal{S}_+$ に見出される量子力学的確率を，第 6 章にならって $\mathcal{P}_+(t)$ と書く．逆に初期に状態 $\mathcal{S}_+$ にあったとして時間 t の後に状態 $\mathcal{S}_-$ に見出される確率も，対称性により，同じく $\mathcal{P}_+(t)$ である．したがって，量子力学的遷移確率は次式で与えられる．

$$W^{\rm QM}(\sigma' t_j|\sigma t_i) = \{1-\mathcal{P}_+(t_j-t_i)\}\delta_{\sigma'\sigma} + \mathcal{P}_+(t_j-t_i)\delta_{\sigma'-\sigma} \ . \quad (9.4.1)$$

これを用いて，量子力学的相関函数を次式により定義する*10．

$$C_{ji}^{\rm QM} := \sum_{\sigma'\sigma} \sigma'\sigma W^{\rm QM}(\sigma' t_j|\sigma t_i)\mathcal{P}^{\rm emp}(\sigma t_i) \quad (9.4.2)$$

$$= \sum_{\sigma}[\{1-\mathcal{P}_+(t_j-t_i)\} - \mathcal{P}_+(t_j-t_i)]\mathcal{P}^{\rm emp}(\sigma t_i) \ . \quad (9.4.3)$$

右辺の［　］内は σ によらない．また，確率の定義により

$$\sum_{\sigma} \mathcal{P}^{\rm emp}(\sigma t_i) = 1 \ . \quad (9.4.4)$$

ゆえに

$$C_{ji}^{\rm QM} = 1 - 2\mathcal{P}_+(t_j-t_i) \ . \quad (9.4.5)$$

---

*8　“時系列に関する結合確率（つまり，系の履歴に関する確率）”を，確率振幅の和則，確率の和則および確率の規格化が相互に矛盾を来さぬよう定義できるかどうかという問題．これは非干渉性歴史理論の主題である．例えば R. Omnes, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1994), Chap. 4.

*9　第 9.2 節では，MR の詳しい素性が不明ゆえ，$\mathcal{S}_{\mp}$ の対称性も時間並進対称性も仮定しなかった．

*10　遷移確率 $W^{\rm QM}(\sigma' t_j|\sigma t_i)$ は QM で計算できるが，初期確率 $\mathcal{P}^{\rm emp}(\sigma t_i)$ は QM の埒外であって，これは実験的に決める以外にない．これが実験家によって測定されないことも多く，その場合には，状況に応じて**無知蒙昧の原理**（厳めしくいえば**等重率**（または**等先験確率**）**の原理** (principle of equal *a priori* probability)）や**正準分布** (canonical distribution) が持ち出され，$\mathcal{P}^{\rm emp}(\sigma t_i)$ の値が推定される．いずれにせよ一般に (9.4.2) は QM だけの産物ではなく，経験事実（もしくは経験的推量）と QM を組み合わせて得られるものである．

QM が正しければ，これが $C_{ji}^{\rm emp}$ と一致するはずである．

以下，対称二連井戸の場合に着目し，QM の予言する結果 (6.3.22) を使えば[*11]

$$C_{ji}^{\rm QM} = C(t_j - t_i)\,, \quad C(t) \approx e^{-t/T_2}\cos(t\tilde{\Delta})\ . \tag{9.4.6}$$

すなわち，量子力学的相関函数は $\mathcal{P}_\pm$ における干渉項で与えられる．

Leggett-Garg 不等式における $\mathcal{K}_l$ にて $C_{ji}^{\rm MR}$ を $C_{ji}^{\rm QM}$（すなわち $C(t_j - t_i)$）で置き換えたものを $\mathcal{K}_l^{\rm QM}$ と書こう．これに関して次の定理が成り立つ．

定理　相関函数 $C(t)$ が上（下）に凸の場合，t_3 と t_1 を固定すれば，$t_3 - t_2 = t_2 - t_1$ のときに $\mathcal{K}_1^{\rm QM}$ ($\mathcal{K}_2^{\rm QM}$) は最大となる．また，$C(t)$ が上に凸の場合，t_4 と t_1 を固定すれば t_4, t_3, t_2, t_1 が等間隔のときに $\mathcal{K}_3^{\rm QM}$ は最大となる．

そこで

$$t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = \tau/\tilde{\Delta} \tag{9.4.7}$$

と採り，$\cos\tau > 0 > \cos 2\tau$ を満たす τ を考えれば，

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^{\rm QM} &= |e^{-\gamma\tau}\cos\tau - e^{-2\gamma\tau}\cos 2\tau| + e^{-\gamma\tau}\cos\tau \\ &= 2e^{-\gamma\tau}\cos\tau - e^{-2\gamma\tau}\cos 2\tau\ , \end{aligned} \tag{9.4.8}$$

$$\gamma \equiv (T_2\tilde{\Delta})^{-1}\ . \tag{9.4.9}$$

もし環境による干渉性消失効果が無視できる（$\gamma = 0$）ならば

$$\mathcal{K}_1^{\rm QM} = -2\left(\cos\tau - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\ , \tag{9.4.10}$$

$$\max_\tau \mathcal{K}_1^{\rm QM} = \mathcal{K}_1^{\rm QM}\Big|_{\tau=\pi/3} = \frac{3}{2} > 1\ . \tag{9.4.11}$$

これは $\mathcal{LG}1$ と矛盾する．したがって QM 対 MR の相克に黒白が付けられる．これに対し，干渉性の消失が著しい（$\gamma \gg 1$）と $|\mathcal{K}_1^{\rm QM}| \ll 1$ となってしまい，もはや QM と MR は Leggett-Garg 不等式に関しては矛盾しない．どの程度の γ まで $\mathcal{LG}1$ が破れるか，およその見積りをすべく，$\tau = \pi/3$ と採ってみれば[*12]

---

*11　簡単のため θ_0 を無視．また，$2/\Gamma_1$ を T_2 と書く．式 (6.3.22) は時間域 (6.3.18) において導かれたが，Leggett-Garg 不等式についての感触を得るべく，$\mathcal{O}(1/\Delta)$ 程度の時間域でも使えるものとして以下の議論を行う．正確に議論したければ (6.3.14) から得られる $\mathcal{P}_+(t)$ を使えばよい．

*12　最も好都合な τ の値は γ に依存するが，以下の結果からして，その γ 依存性は余り重要でない．

$$\mathcal{K}_1^{\rm QM} = z_1 + \frac{1}{2} z_1^2\ , \quad z_1 \equiv e^{-\pi\gamma/3}\ . \tag{9.4.12}$$

したがって

$$\mathcal{K}_1^{\rm QM} > 1 \Longleftrightarrow z_1 > \sqrt{3} - 1 \Longleftrightarrow \gamma < 0.297\cdots\ . \tag{9.4.13}$$

残りの二つの不等式についても同様の考察をすれば，$\mathcal{LG}2, \mathcal{LG}3$ を破る γ の最大値として，それぞれ 0.15, 0.31 程度の値が得られる．したがって，γ に対する許容度という観点からすれば $\mathcal{LG}3$ が最適である．現在までに行われている MQT 実験は，本節の言葉でいえば γ の大きい場合に対応し*13，Leggett-Garg 不等式を破るような結果は得られていない．

式 (6.2.37) を用いて $\gamma \sim \eta/h$ と見積もれば，条件 (9.4.13) は $\eta/h \lesssim 0.3$ と翻訳される．例えば SQUID の場合，抵抗を充分に大きくしてこの条件を満たすことは技術的に可能と考えられている（式 (3.1.49) 参照）．

9.5　Leggett-Garg 不等式を試す思考実験

もし実験結果 $C_{ji}^{\rm emp}$ が Leggett-Garg 不等式を破るならば，MR は否定されたことになる．ただし，当該の実験が MR の立場からして無侵襲測定になっていることが必要である．さらに，もしその実験結果が

$$C_{ji}^{\rm emp} \simeq C_{ji}^{\rm QM} \tag{9.5.1}$$

を満たすならば，MR が否定され QM に軍配が上がったことになる．

QM が正しければ (9.5.1) が成り立つはずであるといったが，実はここに重大な問題が潜んでいる．相関函数 $C_{ji}^{\rm emp}$ を算出するためには，二つの時点 $\{t_j, t_i\}$ において巨視系の状態を測定しなければならない．ところが，巨視系の状態を測定すると，古典物理学的に考えられる擾乱を極力排除して MR の意味での無侵襲測定を実現したとしても，測定装置と巨視系は必然的に縺状態になってしまう．QM が正しければ，測定過程自体も QM で記述されるべき物理的過程であるから，これは避けようのない事態である．したがって，時刻 t_i における測定行為によって，それ以降の巨視系の量子力学的時間発展が変

*13　MQT におけるポテンシャルは対称二連井戸ではないから，これはおよその対応である．

更を受けてしまう．それゆえ，時刻 $t_j(>t_i)$ に再び測定をして得られる遷移確率 $W^{\mathrm{emp}}(\sigma' t_j|\sigma t_i)$ は，巨視系本来の時間発展による遷移確率 $W^{\mathrm{QM}}(\sigma' t_j|\sigma t_i)$ と異なってしまうであろう．つまり，QM が妥当であるとすれば正にその事実によって，QM の予言する遷移確率を測定することは不可能ではないかというわけである．では絶望であろうか．幸いにして，そうではない．例えば遷移確率 $W^{\mathrm{QM}}(+t_2|-t_1)$ を実験的に得るためには，時刻 t_1 における巨視系の状態が $\mathcal{S}_-$ であったという場合の[*14]時間発展が無傷でありさえすればよく，$\mathcal{S}_+$ であったという場合の時間発展は著しく変更を受けても一向に構わない．この点に着目して注意深く実験を設計すれば，(9.5.1) という結果が得られるであろう．そのような実験を，SQUID における量子共鳴振動に即して描いてみせたのが，これから紹介する **Tesche の思考実験**である．

以下，QM が成り立っているものとして話を進める．$\mathcal{SQUID}$[*15]の磁束を測定する装置として，dc-SQUID を使う．後者も超伝導体の環であるが，前者と異なって，外部と電流のやりとりをする端子が付いており，また，Josephson 接合が二つ挿入されている（図 9.1 の × 印）．それゆえ，環を貫く磁束に応じて端子に現れる電流が敏感に変化する．この電流を読みとってやれば，dc-SQUID は磁束計として機能する．$\mathcal{SQUID}$ の近くに dc-SQUID を置くと，両者の磁場は互いに相手の環を貫く．その強さは相互誘導係数 (mutual inductance) によって決まり，これは両者の相対的な幾何学的配置を変えることによって調節できる[*16]．したがって，dc-SQUID を使って $\mathcal{SQUID}$ の磁束の様子を観察することができる．ただし，一般に dc-SQUID の影響で $\mathcal{SQUID}$ の環を貫く外部磁束 Φ_{ex} が変化し，$\mathcal{SQUID}$ の磁束ポテンシャル $U\ (\equiv U(\Phi))$ の形が変わってしまうことに注意しなければならない（式 (3.1.20)）．dc-SQUID を貫く磁束 Φ^{dc} の量子力学も，$\mathcal{SQUID}$ の場合と同様に論ずることができ，適当な磁束領域に着目すれば傾斜二連井戸型のポテンシャル $U^{\mathrm{dc}}\ (\equiv U^{\mathrm{dc}}(\Phi^{\mathrm{dc}}))$ で記述される．その傾き具合および障壁の大きさは，端子から注入される外部電流 $I_{\mathrm{ex}}^{\mathrm{dc}}$

---

*14 この場合のという言葉の正確な意味は，式を使わずして表現することは難しい．以下の議論を参照．

*15 第 3.1 節の SQUID（rf-SQUID）のことを，以下で導入する dc-SQUID と弁別すべく，花文字で書く．

*16 図 9.1 は必ずしも現実の配置を描いたものではない．

と環を貫く外部磁束 $\Phi_{\rm ex}^{\rm dc}$ によって連続的に制御することができる．以下，この dc-SQUID を DC [*17] と略称する．相互誘導を無視した場合の U が対称二連井戸となるように調整されていたとして，DC [*18] が $U^{\rm dc}$ の左井戸に片寄れば U は左下がりに傾き，右井戸に片寄れば右下がりに傾く [*19]．もちろん，*SQUID* も DC に影響を及ぼし，*SQUID* が U の左(右)井戸に片寄れば $U^{\rm dc}$ は左(右)下がりに傾くものとする．

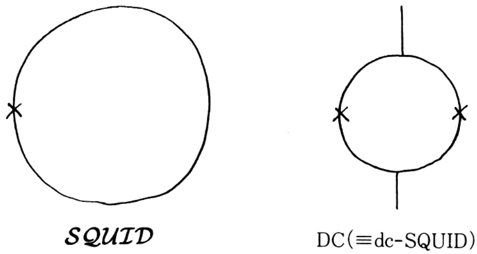


図 9.1　*SQUID* の磁束を測定する dc-SQUID

実験の初期設定を以下のようにする．まず $U^{\rm dc}$ が充分に左下がりとなる状況を用意して，DC を左井戸の基底状態に落ち着かせる．しかる後に $\Phi_{\rm ex}^{\rm dc}$ を再調整して，$U^{\rm dc}$ を右下がりにし，左井戸の基底状態エネルギーが右井戸の基底状態と第 1 励起状態の中間 [*20] に来るようにする(図 9.2(0))．障壁を充分大きく設定し，この状況下では左井戸基底状態から右井戸へトンネルすることが事実上できないものとしておけば，DC は左井戸の基底状態 $|-\rangle_{\rm dc}$ に留まる．このとき，U は DC からの磁束により左に傾くが，$\Phi_{\rm ex}$ を再調節して対称二連井戸に戻しておく．図 9.2(0) の $U^{\rm dc}$ は，*SQUID* からの影響を無視した場合のものである．この影響を考慮すると，*SQUID* が左井戸にあるか右井戸にあるかに応じて $U^{\rm dc}$ の障壁は増大もしくは減少する(図 9.2(∓))．ただし，図 9.2 の (−) の場合にはもとより (+) の場合にも，依然として障壁は充分に大きく，

---

*17　以下で述べるように，DC は，*SQUID* の磁束を観察する探針 (probe) として働くと同時に測定器 (detector または counter) の役も果たす．

*18　DC における磁束の量子状態というべきところを DC と略記．以下同様．

*19　そのような配置にしておく．

*20　一般に第 n 励起状態と第 $n+1$ 励起状態の中間でも構わない．

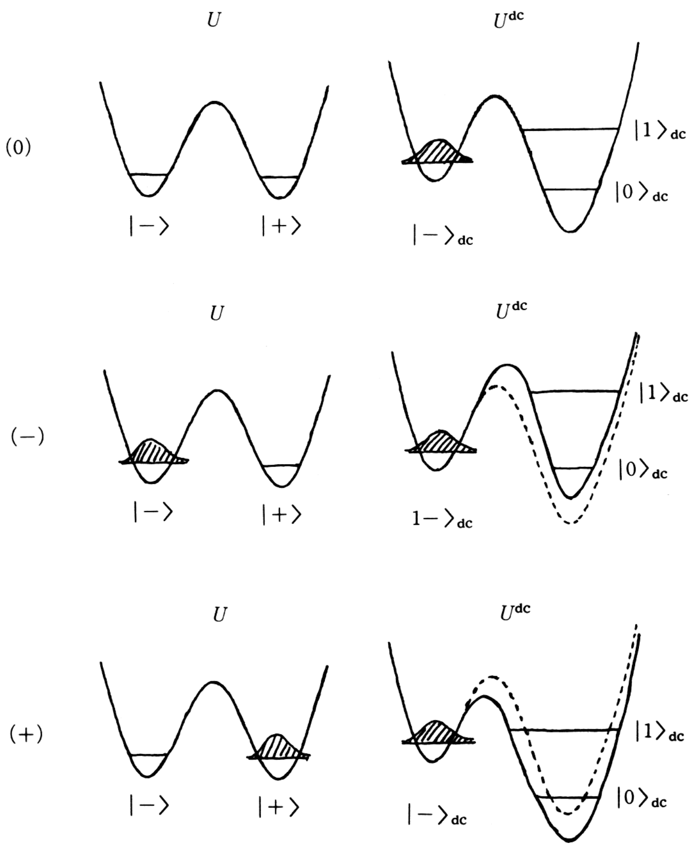


図 9.2　実験の初期設定（図 (∓) の破線は図 (0) の $U^{\rm dc}$）

DC は左井戸の基底状態に留まるものとする．これら (±) の場合の左井戸基底状態は，ポテンシャルの歪みを反映して (0) におけるものと若干異なるが，その違いは無視できるとして同じ記号 $|-\rangle_{\rm dc}$ で表す．同じく，U も (±) の場合には (0) におけるものとわずかに異なり若干非対称となるであろうが，この差も無視できるものとする．

以上の初期設定の後，$U^{\rm dc}$ の障壁を一時的に小さくし，

SQUID が右井戸にある場合にだけ，

$|-\rangle_{\rm dc}$ と右井戸第 1 励起状態 $|1\rangle_{\rm dc}$ のエネルギーが一致する

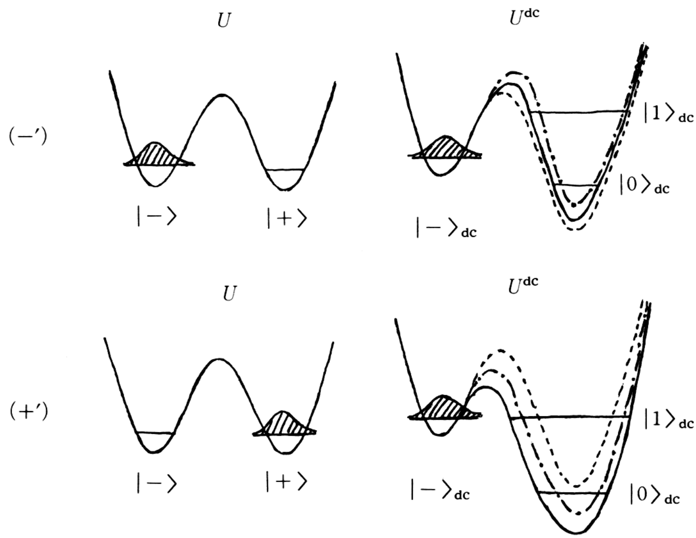


図 9.3　dc-SQUID を作動させた直後の状況（破線は図 9.2(0) の U^{dc}，一点鎖線はそれぞれ図 9.2(∓) の U^{dc}）

という状況を作り出す（図 9.3）．図 9.3(+′) の場合には，DC は共鳴トンネル状況に置かれたことになり，もし環境から影響されなければ $|-\rangle_{dc}$ と $|1\rangle_{dc}$ の間をある周期 $2\pi/\Delta^{dc}$ で往復し始めるであろう．しかし，現実には環境との相互作用があり，状態 $|1\rangle_{dc}$ は右井戸基底状態 $|0\rangle_{dc}$ に落ちていくであろう．DC に対する環境の効果が大きくて

$$\text{状態 } |1\rangle_{dc} \text{ の寿命 } T_1^{dc} \text{ は } \pi/\Delta^{dc} \text{ に比べて非常に短い} \qquad (9.5.2)$$

とすれば，結果として $|1\rangle_{dc}$ は直ちに不可逆的に $|0\rangle_{dc}$ に移行することになる．DC が右井戸に移ると U は大きく右に傾き，その後の $\mathcal{SQUID}$ の量子共鳴振動は阻害される．これに対し，図 9.3(−′) の場合には DC が状態 $|-\rangle_{dc}$ に留まるので，$\mathcal{SQUID}$ の量子共鳴振動は阻害されない．

話を単純化するために，DC と相互作用する環境として第 4.3 節の模型を採用しよう．一方，$\mathcal{SQUID}$ においては環境効果は無視できるものとし，かつ，その量子共鳴周期 $2\pi/\Delta$ が T_1^{dc} に比べて圧倒的に長いとする．そして

$$t_1 < t < t_1 + \delta \ : \ T_1^{dc} \ll \delta \ll 2\pi/\Delta \qquad (9.5.3)$$

という期間だけ，U^{dc} の障壁を小さくする（図 9.3 の状況を作る）ことにし，こ

の操作をDCを作動させると言い表す．作動操作直前における $\mathcal{SQUID}$, DC および環境を合わせた全系の状態は次の形に書かれよう．

$$|\Psi(t_1)\rangle = \{c_-|-\rangle + c_+|+\rangle\}|-\rangle_{dc}|\mathrm{vac}\rangle$$
$$= c_-|-\rangle|-\rangle_{dc}|\mathrm{vac}\rangle + c_+|+\rangle|-\rangle_{dc}|\mathrm{vac}\rangle\ , \quad |c_-|^2+|c_+|^2 = 1. \tag{9.5.4}$$

この線形結合の第1項が図9.2の(−)の場合を表し，第2項が(+)の場合を表す[*21]．DCを作動させると，この各項はそれぞれ図9.3の(−′)の場合と(+′)の場合を表すことになる．条件(9.5.3)のもとでは作動期間中における $\mathcal{SQUID}$ 独自の時間変化は無視できる．したがって，第1項は変化せず，第2項においては作動終了直後のDCの状態は $|0\rangle_{dc}$ となり，同時に $\mathcal{SQUID}$ の状態は右下がりポテンシャルの右井戸基底状態 $|\widetilde{+}\rangle$ となる（図9.4）．

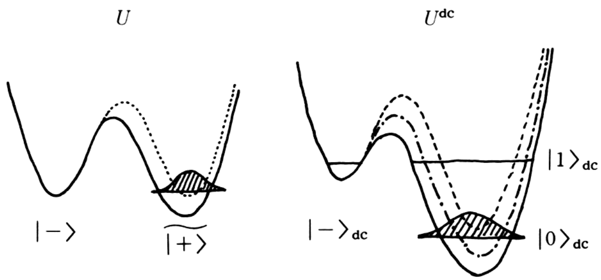


図9.4 dc-SQUIDが右井戸に移った状況（左図の点線は図9.2の U，右図の3曲線は図9.3(+′)と同じ）

$$|\Psi(t_1+\delta)\rangle \simeq c_-|-\rangle|-\rangle_{dc}|\mathrm{vac}\rangle + c_+|\widetilde{+}\rangle|0\rangle_{dc}\sum_\alpha c_\alpha(\delta)|\alpha\rangle\ . \tag{9.5.5}$$

これは，$\mathcal{SQUID}$ の状態 $\{|-\rangle, |\widetilde{+}\rangle\}$ をそれぞれDCの状態 $\{|-\rangle_{dc}, |0\rangle_{dc}\}$ と組にして重ね合わせた縺状態である．この状態においては，$|-\rangle$ と $|-\rangle_{dc}$，および $|\widetilde{+}\rangle$ と $|0\rangle_{dc}$ が，それぞれ“相関している”(correlated)といわれる．この相関が生じた結果，当初の $\mathcal{SQUID}$ 独自の線形結合は無惨にこわれてしまったが，$\mathcal{SQUID}$ の状態が $|\pm\rangle$ のいずれであるかを測定するためには，正にこのような

*21 つまり，本節における場合は，古典的な場合分けを意味するわけではなく，線形結合に現れる各項を描写する言葉である．

相関が要求されるわけである．纏状態 (9.5.5) には環境も絡んでいる．もし環境が関与しないとすれば，上式右辺は

$$\left\{c_-|-\rangle|-\rangle_{\mathrm{dc}}+c_+\widetilde{|+\rangle}\left(\cos\left(\frac{\Delta^{\mathrm{dc}}}{2}\delta\right)|-\rangle_{\mathrm{dc}}-i\sin\left(\frac{\Delta^{\mathrm{dc}}}{2}\delta\right)|1\rangle_{\mathrm{dc}}\right)\right\}|\mathrm{vac}\rangle \tag{9.5.6}$$

で置き換えられ，$\delta=\pi/\Delta^{\mathrm{dc}}$ と調整しない限り，上述の相関が損なわれてしまう．しかし，環境をも巻き込んだ纏状態 (9.5.5) においては，もはやそのような心配は無用である*22．したがって，測定装置としての DC にとっては，(9.5.2) は望ましい状況といえる．

さらなる時間発展を追ってみよう．状態 (9.5.5) の第 1 項においては，$\mathcal{SQUID}$ は独自の量子共鳴振動をし，DC は変化しない．第 2 項においては，$\mathcal{SQUID}$ も DC も変化しない．したがって，時刻 $t_2\,(>t_1+\delta)$ における全系の状態は*23

$$\begin{aligned}|\Psi(t_2)\rangle \simeq\ & c_-(t_2-t_1)\{\cos(\tau/2)|-\rangle-i\sin(\tau/2)|+\rangle\}|-\rangle_{\mathrm{dc}}|\mathrm{vac}\rangle\\ &+c_+(t_2-t_1)\widetilde{|+\rangle}|0\rangle_{\mathrm{dc}}\sum_\alpha c_\alpha(\delta)e^{-i(t_2-t_1)\omega_\alpha}|\alpha\rangle,\quad \tau\equiv(t_2-t_1)\Delta,\end{aligned} \tag{9.5.7}$$

$$c_-(t)\equiv c_-\exp(-itE_-^{\mathrm{dc}}/h),\quad c_+(t)\equiv c_+\exp(-itE_{\tilde{+}}/h). \tag{9.5.8}$$

第 1 項に，$\mathcal{SQUID}$ の初期状態が $|-\rangle$ の場合の $\mathcal{SQUID}$ 独自の時間発展が保たれている．

残る仕事は，時刻 t_2 における $\mathcal{SQUID}$ の状態を測定することであるが，これは気楽である．t_2 以後の時刻は興味の範囲外であるから，この測定によって系がいくら乱されようと構わない．あらかじめ上述の DC と同じものをもう 1 個用意して同じように配置しておき，時刻 t_2 にてこれを作動させればよい．この第 2 DC の状態を $|\ \rangle_{\mathrm{dc}'}$，これと相互作用する環境の状態を $|\ \rangle'$ で表せば，これらをも含めた全系の状態は，初期には (9.5.4) に $|-\rangle_{\mathrm{dc}'}|\mathrm{vac}\rangle'$ を掛けたもので与えられ，第 2 DC が作動を終えた直後の時刻 $T\,(\equiv t_2+\delta)$ においては

*22　理由は，ここでも，事実上無限大の Poincaré 周期(第 2.5 節参照)．

*23　状態 $|-\rangle$ と $|0\rangle_{\mathrm{dc}}$ のエネルギーを $\mathcal{SQUID}$ および DC のエネルギーの原点に採り，$\widetilde{|+\rangle}, |-\rangle_{\mathrm{dc}}$ のエネルギーを $E_{\tilde{+}}, E_-^{\mathrm{dc}}$ とする．

$$
\begin{aligned}
|\Psi(T)\rangle \simeq\, & c_-(2(t_2-t_1))\cos(\tau/2)|-\rangle|\mathrm{vac}\rangle|\mathrm{vac}\rangle'|-,-\rangle\rangle \\
& - ic_-(t_2-t_1)\sin(\tau/2)\widetilde{|+\rangle}|\mathrm{vac}\rangle\sum_{\alpha'}c_{\alpha'}(\delta)|\alpha'\rangle'|-,0\rangle\rangle \\
& + c_+(t_2-t_1)\widetilde{|+\rangle}\sum_{\alpha}c_\alpha(\delta)e^{-i(t_2-t_1)\omega_\alpha}|\alpha\rangle\sum_{\alpha'}c_{\alpha'}(\delta)|\alpha'\rangle'|0,0\rangle\rangle,
\end{aligned}
\tag{9.5.9}
$$

ただし

$$
|*,*'\rangle\rangle \equiv |*\rangle_{\mathrm{dc}}|*'\rangle_{\mathrm{dc}'}\,. \tag{9.5.10}
$$

時刻 T において，例えば“第1DC はまだエネルギーを放出していないが，第2DC は環境にエネルギーを放出してしまった”という事象の頻度を実験から求めることができる．その確率は上式第2項($|-,0\rangle\rangle$ に比例する項)から $|c_-|^2(\sin(\tau/2))^2$ で与えられる．係数 $|c_-|^2\,(=1-|c_+|^2)$ は，“両 DC ともエネルギーを放出してしまった”という事象の頻度(その確率は，$|0,0\rangle\rangle$ に比例する第3項より $|c_+|^2$)を計測することによって決定できる．言い換えれば，実験家が直接に“見る”ことのできるのは，2個の DC のみに関する**粗い密度演算子**[*24]

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}^{\mathrm{dc,dc}'} &\equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{SQUID}}\ \mathrm{Tr}_{環境}\ \mathrm{Tr}_{環境'}\ |\Psi(T)\rangle\langle\Psi(T)| \\
&= |c_-\cos(\tau/2)|^2\ |-,-\rangle\rangle\langle\langle-,-| \\
&\quad +|c_-\sin(\tau/2)|^2\ |-,0\rangle\rangle\langle\langle-,0|+|c_+|^2|0,0\rangle\rangle\langle\langle0,0|
\end{aligned}
\tag{9.5.11}
$$

であって，ここに所望の情報が表示されている．かくて，量子力学的遷移確率 $W^{\mathrm{QM}}(+t_2|-t_1)\,(=\mathcal{P}_+(t_2-t_1)\simeq(\sin(\tau/2))^2)$ を測定することは原理的に可能であるとの結論に達する．

9.6 結　語

Leggett 構想は，発表後十数年経った今，ますます現実味を帯びてきた．例えば Young 型実験は，従来は非常に高度の真空中で行われていたものであるが，この10年余り，固体中の電子を用いても行われている．超伝導体のような

---

*24 正式には**縮約された密度演算子** (reduced density operator).

特殊な秩序状態にある場合を除けば，そのような干渉効果は，従来，“固体という環境の影響でかき消されてしまう”と思われていた．しかし，メゾスコピック（mesoscopic）技術の進歩は，相当巨視的な（例えば1 μm 程度の大きさの）固体を充分静謐な状態に保つことを可能にした．その結果，真空中におけるのと本質的に同じ干渉効果が確認されている．したがって，“環境の存在すなわち干渉性消失”という図式は必ずしも成立せず，QIMDS 検出の望みも荒唐無稽ではなくなったといえよう．

事実，MQT はすでに数種の系において検出されたと考えられている．例えば，SQUID*25 において確認された MQT は，超伝導体で作られた環を貫く磁束が，トンネル効果で環の外へ抜ける現象である（第3.1節）．磁束には環の表面を流れる電流が伴い，この電流を担う電子の個数は典型的に 10^{15} 程度と見積もられるから，磁束が環を貫く状態と環の外へ抜けた状態は巨視的可峻別というわけである．MQT 実験は巨視的可峻別状態間の位相差を直接に観察してはいない*26から，QIMDS の証拠としては間接的である．しかし，この程度に巨視的な世界において，トンネル現象という際だって量子力学的な現象が確認されたのは注目すべきことである．現在は MQT の実例を増やし，MQC 検証を展望し得る複数の道筋を開拓すべき時期であろう．第3章で紹介したように，量子核形成や微小磁性体におけるトンネル現象も活発に研究されている．

もし前節に述べた思考実験が実現されれば，式 (9.5.1) を検証することができ，また，このような実験は MR の言う無侵襲測定にもなっていると考えてよいであろう．この思考実験の実現こそ，来る21世紀における物理学の挑戦課題として非常に意義深いものである．

演習問題

9.1　第9.4節の定理を証明せよ．証明の方法としては，例えば

$$T \equiv t_3 - t_1 \ , \quad x \equiv (t_2 - t_1)/T \ , \quad f(x) \equiv C(Tx) \qquad (9.6.1)$$

と置けば

---

*25　およびそれと本質的に類似の Josephson 接合系 CBJJ.

*26　MQT で観測されるのは，例えば式 (2.3.4) における各項の係数の絶対値だけである．

$$\mathcal{K}_2^{\rm QM} = -f(1-x)-f(x)-C(T) \;:\; 0<x<1 \;, \tag{9.6.2}$$

$$d\mathcal{K}_2^{\rm QM}/dx = -f'(x)+f'(1-x) \;. \tag{9.6.3}$$

仮定により $f''(x)>0$，つまり $f'(x)$ は単調増大．ゆえに $\mathcal{K}_2^{\rm QM}$ は $x=1-x$ にて最大．他の場合も同様．

9.2 次式を示し，$\mathcal{LG}2, \mathcal{LG}3$ を破る γ の最大値を見積もれ．

$$\mathcal{K}_2^{\rm QM}\big|_{\tau=2\pi/3} = z_2+\frac{1}{2}z_2^2 \;, \quad z_2 \equiv e^{-2\pi\gamma/3} \;, \tag{9.6.4}$$

$$\mathcal{K}_3^{\rm QM}\big|_{\tau=\pi/4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3z_3+z_3^3) \;, \quad z_3 \equiv e^{-\pi\gamma/4} \;. \tag{9.6.5}$$

9.3 Tesche の思考実験は，どのような Hamiltonian によって記述されるか．適切な Hamiltonian を書き下し，状態の時間発展を詳細に調べよ．

A

Euclid空間とHilbert空間

この付録は，数学的に完全な定義を与えるものではなく，単に記号の説明である．

A.1　3次元 Euclid 空間

実験室内の3次元空間を Euclid 空間 $\mathbf{E}^3$ とみなし，正規直交右手系 (2.2.13) を適当に採る．$\mathbf{E}^3$ はこれらで張られる (spanned) 線形空間である．このことを次のように表す．

$$\mathbf{E}^3 = \mathcal{S}pan\{\boldsymbol{e}_j \mid j = x, y, z\} := \left\{\sum_j x_j \boldsymbol{e}_j \mid x_j \in \mathbf{R}\right\}. \quad \text{(A.1.1)}$$

$\mathbf{E}^3$ における回転テンソルを $\mathcal{R}$ と書く．

$$\mathcal{R}\boldsymbol{e}_j = \sum_k \boldsymbol{e}_k \mathcal{R}_{kj}\ . \quad \text{(A.1.2)}$$

$\{\mathcal{R}_{kj}\}$ は行列式が1の3×3行列 ($\{\mathcal{R}_{kj}\} \in SO(3)$) である．単位ヴェクトル $\boldsymbol{n}$ の回りに θ だけ回転することを表したい場合には $\mathcal{R}(\theta\boldsymbol{n})$, $\mathcal{R}_{kj}(\theta\boldsymbol{n})$ と書く．所望の回転は長さ θ のヴェクトル $\theta\boldsymbol{n}$ によって指定できるからである．

A.2　Hilbert 空間

正規直交基底系*1

*1　基底系と略称．正規直交性を持たない基底系を使う場合には，そのたびに断る．

$$\{|n\rangle \mid n \in \mathbf{N} \ : \ \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}\} \qquad \text{(A. 2. 1)}$$

で張られる線形空間(Hilbert 空間) $\mathcal{H}$ を，(A. 1. 1) にならって次のように表す.

$$\mathcal{H} = \mathcal{S}pan\{|n\rangle \mid n \in \mathbf{N}\} := \left\{\sum_n c_n|n\rangle \mid c_n \in \mathbf{C}\right\}. \qquad \text{(A. 2. 2)}$$

つまり $\mathcal{H}$ は $\{|n\rangle\}$ のありとあらゆる線形結合からなる集合である．この $\mathcal{H}$ およびそれとは別の Hilbert 空間

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{S}pan\{\widetilde{|\alpha\rangle} \mid \alpha \in \mathbf{N}\} \qquad \text{(A. 2. 3)}$$

に対し，直積空間 (direct-product space) $\mathcal{H}\otimes\tilde{\mathcal{H}}$ が定義される.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\otimes\tilde{\mathcal{H}} &:= \mathcal{S}pan\{|n,\alpha\rangle\rangle \mid n,\alpha \in \mathbf{N} \ : \ |n,\alpha\rangle\rangle \equiv |n\rangle\widetilde{|\alpha\rangle}\} \\ &= \left\{\sum_{n\alpha} c_{n\alpha}|n,\alpha\rangle\rangle \mid c_{n\alpha} \in \mathbf{C}\right\}. \qquad \text{(A. 2. 4)}\end{aligned}$$

これは要するに $\{|n,\alpha\rangle\rangle\}$ のありとあらゆる線形結合からなる集合である．この空間における内積は，線形性および次の約束によって規定される.

$$\langle\langle n,\alpha|n',\alpha'\rangle\rangle = \langle n|n'\rangle\ \widetilde{\langle\alpha|\alpha'\rangle}\ . \qquad \text{(A. 2. 5)}$$

したがって，$\mathcal{H}$ と $\tilde{\mathcal{H}}$ の順序はどうでもよい $(\mathcal{H}\otimes\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{H})$．多数の Hilbert 空間 $\{\mathcal{H}^{(\mu)}\}$ の直積も同様に定義される．これを $\bigotimes_\mu \mathcal{H}^{(\mu)}$ と書く.

B 単一自由度系における準基底状態とその崩壊

量子崩壊現象を記述する理論を崩壊の量子論と呼ぶ．この付録はその入門であり，$H_{\mathcal{S}}$ は (2.1.10) の Hamiltonian，V はたんこぶ坂である．

B.1 エネルギー固有函数

本節の記述が抽象的に過ぎると感じられる場合には，箱形障壁問題を厳密に解いて，もしくは，たんこぶ坂問題を素朴 WKB 法で解いて，その内容を具体的に確かめられたい．

エネルギー固有函数$\mathcal{U}_E$ を次式によって定義する．

$$H_{\mathcal{S}}\,\mathcal{U}_E(q) = E\,\mathcal{U}_E(q)\ , \tag{B.1.1}$$

$$\mathcal{U}_E(-\infty) = 0\ . \tag{B.1.2}$$

式 (B.1.1) は 2 階微分方程式であるから，所与の E に対して線形独立な解が二つ存在する．その特別な線形結合を選び出すのが左方境界条件 (B.1.2) である．$E > V_\star$ ならば，$\mathcal{U}_E$ は左方の無限に高い壁により完全反射される波である．右方領域 $q > q_\star$ においては，ポテンシャルが定数であるから，以下のように書くことができる．

$$\mathcal{U}_E(q) \;=\; \frac{1}{2i}\{A_+e^{ik(E)q} - A_-e^{-ik(E)q}\}\ :\ q > q_\star\ , \tag{B.1.3}$$

$$k(E) := \{2(E-V_\star)\}^{1/2}/h\ . \tag{B.1.4}$$

$A_\pm$ は後で決められるべき複素係数である．境界条件 (B.1.2) により，比 A_-/A_+ は E の函数として一意的に定められる．したがって $\mathcal{U}_E$ は，全体に掛かる勝手な定数因子（全体因子と略称）を除いて一意的に決まる．全体因子は E

に依存して構わない．これがうまく選ばれたとすれば

$$\mathcal{U}_E(q) = \begin{cases} b_E(q) & : \ q < 1 \ , \\ \dfrac{1}{2i}\{A_+(E)e^{ik(E)q} - A_-(E)e^{-ik(E)q}\} & : \ q > q_\star \ . \end{cases} \qquad \text{(B.1.5)}$$

ここに，b_E と $A_\pm(E)$ は E の滑らかな函数であり，$b_E(q)$ は $q \sim 0$ に局在した規格化された実函数である．

E は方程式 (B.1.1) に単なる係数として入っているだけであるから，以上述べたことは，反射波という物理的解釈を別にすれば，E が勝手な複素数であっても成り立つ*1．E を複素数とみなす場合には $k(E)$ の枝を次のように取り決める．

$$\arg\{|E - V_\star|e^{i\theta}\}^{1/2} = \theta/2 \ : \ -\pi < \theta \leqq \pi \ . \qquad \text{(B.1.6)}$$

したがって，特に

$$k(E) = i|k(E)| \ : \ \theta = \pi \ . \qquad \text{(B.1.7)}$$

H_S が実であるから，全体因子を上述のように採れば

$$\mathcal{U}_E(q) \in \mathbf{R} \ : \ E \in \mathbf{R} \ . \qquad \text{(B.1.8)}$$

したがって*2

$$A_-(E) = \{A_+(E)\}^* \ : \ E > V_\star \ . \qquad \text{(B.1.9)}$$

エネルギー固有函数はさらに以下の性質 $\mathcal{P}0 - \mathcal{P}3$ を持つ．

$\mathcal{P}0$：全体因子を適切に採っておけば，b_E および $A_\pm(E)$ は，
$E = V_\star$ に分岐点を持つ以外は，E に関して解析的である．

これはほぼ自明であろう．厳めしくいえば Poincaré 定理の帰結である．同定理によれば，ある助変数に関し，微分方程式の係数が解析的ならば，その解もまた解析的である．方程式 (B.1.1) の係数は E に関して明らかに解析的である．ゆえに $\mathcal{U}_E$ もまた然り．$A_\pm(E)$ に分岐点の現れる理由は，前者を (B.1.5) という形に書き，$E = V_\star$ に分岐点を持つ因子 (B.1.4) を無理矢理に持ち込んだからに過ぎない．$\mathcal{U}_E$ 自体には分岐点など存在しない．

複素 E 面において実軸上の無限区間 $(-\infty, V_\star)$ に切れ目 (cut) を入れた領域 C_c を考える．すると

---

*1　E が複素数の場合にも $\mathcal{U}_E$ をエネルギー固有函数と呼ぶ．

*2　一般に複素数 z が実かつ正なることを $z > 0$ と書く．

$\mathcal{P}1$: $\boldsymbol{C}_c$ 上において，$A_\pm(E)$ の零点は，実軸に関して互いに鏡像の関係に位置する．

これは $\mathcal{P}0$ と (B.1.9) の帰結である．次に

$\mathcal{P}2$: $A_-(E)$ の零点を

$$E_n - \frac{1}{2}ih\Gamma_n \;:\; n = 0, 1, \cdots,\; E_n, \Gamma_n \in \mathbf{R},\; E_0 < E_1 < \cdots \tag{B.1.10}$$

とすれば $\Gamma_n > 0$. (B.1.11)

これは次節にて証明する．また

$\mathcal{P}3$: 準古典的状況においては各 n について

$$E_n - E_{n-1} = \mathcal{O}(h\omega_0) \;:\; E_{-1} \equiv 0 \,, \tag{B.1.12}$$

$$h\Gamma_n/(E_n - E_{n-1}) = \mathcal{O}(e^{-1/h}) \,. \tag{B.1.13}$$

この性質により，以下の条件を満たす正数 $\bar{\epsilon}$ が存在する．

$$h\Gamma_n \ll \bar{\epsilon} \ll E_n - E_{n-1} \,, \tag{B.1.14}$$

$$A_\pm(E) \simeq \left\{E - \left(E_n \pm \frac{1}{2}ih\Gamma_n\right)\right\}\tilde{a}_{n\pm} \;:\; |E - E_n| < \bar{\epsilon} \,. \tag{B.1.15}$$

ただし $\tilde{a}_{n\pm}$ は E によらない定数であり，(B.1.9) より $\tilde{a}_{n-} = \tilde{a}^*_{n+}$．ゆえに次のように置くことができる．

$$\tilde{a}_{n\pm} =: \sqrt{2\pi/h\Gamma_n}\; a_n \exp(\pm i\delta_n) \,, \tag{B.1.16}$$

ただし a_n と δ_n は実定数．右辺冒頭の因子を導入したのは，こうしておくと a_n が $\mathcal{O}(1)$ となり都合がよいからである．

B.2 準定常波

次式で定義される $\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}$ を**準定常波**(quasi-stationary wave) と呼ぶ．

$$\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) := \mathcal{U}_{\tilde{E}}(q) \,, \quad \tilde{E} \equiv E_0 - \frac{1}{2}ih\Gamma_0 \,. \tag{B.2.1}$$

したがって

$$H_S\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) = \tilde{E}\,\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) \,. \tag{B.2.2}$$

$h\Gamma_0$ は E_0 に比べて小さいから，$q < 1$ において $\mathcal{U}_{\tilde{E}}(q)$ は $\mathcal{U}_{E_0}(q)$ と余り違わな

いと期待される．ゆえに

$$\lim_{q\downarrow -\infty} \mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) = 0 \ , \tag{B.2.3}$$

$$\Re\, \mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) > 0 \ : \ q < 1 \ . \tag{B.2.4}$$

つまり $\Re\, \mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q)$ は $q<1$ にて節 (零点) を持たず，$q=0$ 近傍で Gauss 的な函数である．また (B.1.5) と (B.1.10) より

$$\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) = (2i)^{-1} A_+(\tilde{E}) \exp\{ik(\tilde{E})q\} \ : \ q > q_\star \ . \tag{B.2.5}$$

$\Re\, k(\tilde{E})$ も $\Re\, k(E_0)$ とあまり違わないはずであるから

$$\Re\, k(\tilde{E}) > 0 \ . \tag{B.2.6}$$

ゆえに，(B.2.5) をもって，$\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q)$ は外向き境界条件(outgoing boundary condition) に従うと称する．式 (B.2.2) より

$$\mathcal{U}^*_{\mathrm{QSS}}(q) H_{\mathcal{S}} \mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) - \mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) H_{\mathcal{S}} \mathcal{U}^*_{\mathrm{QSS}}(q) = -ih\Gamma_0 |\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q)|^2 . \tag{B.2.7}$$

通常の量子状態の場合には右辺は 0 であり，上式から確率流の保存則 (Wronski 関係式) が得られる．これにならい，準定常波確率積分 $\mathcal{P}(q)$ と準定常波確率流 $\mathcal{J}(q)$ を定義する*3.

$$\mathcal{P}(q) := \int_{-\infty}^{q} dq' \ |\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q')|^2 \ , \tag{B.2.8}$$

$$\mathcal{J}(q) := \Re \left(\mathcal{U}^*_{\mathrm{QSS}}(q) \frac{h}{i} \frac{d}{dq} \mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q) \right) . \tag{B.2.9}$$

性質 (B.2.3) を考慮して (B.2.7) の両辺を積分すれば次の重要な公式が得られる．

$$\Gamma_0 = \mathcal{J}(q)/\mathcal{P}(q) \ . \tag{B.2.10}$$

これを**Gamow 公式**と呼ぶ．α 崩壊を論じた Gamow の歴史的論文において導かれたからである．Gamow 公式の要点は以下のように述べられよう．

　$\mathcal{J}(q)$ も $\mathcal{P}(q)$ もそれぞれ q に依存するけれども，その比は定数である．

このことを利用して q を $q_\star$ より大きく採れば，式 (B.2.5) を使うことができ，

$$\mathcal{J}(q) = h|\mathcal{U}_{\mathrm{QSS}}(q)|^2 \ \Re\, k(\tilde{E}) \ > 0 \ . \tag{B.2.11}$$

最後の不等式は (B.2.6) から得られる．かくて性質 $\mathcal{P}2$ の $n=0$ の場合が導か

*3　これは単なる呼称であって量子力学的確率とは無関係.

れた (同様にして一般に $\Gamma_n > 0$ を示すことができる).

B.3 共鳴と準束縛状態

本節および次節においては $E \in \mathbf{R}$ として，次のように置く.

$$A_\pm(E) =: A(E)\exp(\pm i\delta(E)) \ , \quad A(E) \geqq 0 \ , \ \delta(E) \in \mathbf{R} \ . \tag{B.3.1}$$

すると

$$\mathcal{U}_E(q) = A(E)\sin\{k(E)q + \delta(E)\} \ : \ q > q_\star \ . \tag{B.3.2}$$

式 (B.1.15) と (B.1.16) より

$$\{A(E)\}^2 \simeq a_n^2/\Lambda(E - E_n; h\Gamma_n) \ : \ |E - E_n| < \bar{\epsilon} \ , \tag{B.3.3}$$

$$\Lambda(x;\gamma) := \frac{1}{\pi}\frac{\gamma/2}{x^2 + (\gamma/2)^2} \ . \tag{B.3.4}$$

性質 (B.1.13) により，$A(E)$ は $E = E_n$ にて鋭く落ち込む．例えば

$$A(E_0)/A(0) \sim h\Gamma_0/E_0 \ll 1 \ . \tag{B.3.5}$$

つまり，$\mathcal{U}_{E_n}$ はほぼ準安定井戸内に局在した波を表す．E_n と $\mathcal{U}_{E_n}$ を，それぞれ第 n 共鳴エネルギーおよび第 n 共鳴波と呼ぶ．$b_{E_n}(q)$ には n 個の節がある．特に $b_{E_0}(q)$ は節を持たず，$q \sim 0$ にて Gauss 型の函数である.

共鳴波 $\mathcal{U}_{E_n}$ は，束縛状態のごとくに見えるけれども，$q \sim \infty$ にまで及んでいて規格化できない．ゆえに，それ自体としては量子状態を表さない．しかし，$E = E_n$ 付近の $\mathcal{U}_E$ を重ね合わせることにより，$q \sim 0$ に局在した規格化可能な波動函数を作ることができる.

$$\psi_n(q) := \int_{E_n - \bar{\epsilon}}^{E_n + \bar{\epsilon}} dE \ \tilde{\Lambda}_n(E)\mathcal{U}_E(q) \ , \tag{B.3.6}$$

$$\tilde{\Lambda}_n(E) \equiv \Lambda(E - E_n; h\Gamma_n) \Big/ \int_{E_n - \bar{\epsilon}}^{E_n + \bar{\epsilon}} dE \ \Lambda(E - E_n; h\Gamma_n) \tag{B.3.7}$$

を第 n 準束縛状態 (virtual bound state) と呼び，特に第 0 準束縛状態を 準基底状態 (virtual ground state) と呼ぶ．E_n のごく近傍 ($|E - E_n| \lesssim h\Gamma_n$) のエネルギー E を持つ $\mathcal{U}_E$ だけが寄与するように重ね合わせの係数 ($\propto \{A(E)\}^{-2}$) を選

んだ*4．$\psi_n(q)$ は井戸内ではほぼ $b_{E_n}(q)$ に等しく，井戸の外では非常によい近似で 0 である．

B.4　準基底状態の崩壊

準基底状態に着目し，その崩壊率を求めよう．そのためには，Schrödinger 方程式 (2.1.9) を，初期条件 $\psi(q,0)=\psi_0(q)$ のもとで解けばよい．すると

$$\psi(q,t) = \int_{E_0-\bar{\epsilon}}^{E_0+\bar{\epsilon}} dE\ \tilde{\Lambda}_0(E)\mathcal{U}_E(q)\exp(-iEt/h)\,. \qquad \text{(B.4.1)}$$

特に準安定井戸内においては

$$\psi(q,t) \simeq b_{E_0}(q)e^{-iE_0t/h}\mathcal{A}(\Gamma_0 t; 2\bar{\epsilon}/h\Gamma_0)\ :\ q<1\,, \qquad \text{(B.4.2)}$$

$$\mathcal{A}(\tau;\Delta) := \frac{1}{c}\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{d\nu}{\pi}\frac{e^{-i\nu\tau/2}}{\nu^2+1}\,,\quad c\equiv\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{d\nu}{\pi}\frac{1}{\nu^2+1}\,. \qquad \text{(B.4.3)}$$

第 2.3 節で導入した滞留確率 $\mathcal{P}(t)$ は，式 (B.4.2) と (2.3.1) より

$$\mathcal{P}(t) \simeq |\mathcal{A}(\Gamma_0 t; 2\bar{\epsilon}/h\Gamma_0)|^2\,. \qquad \text{(B.4.4)}$$

準古典的状況においては $\Delta \gg 1$ であり，積分 (B.4.3) を近似的に計算すれば

$$\mathcal{A}(\tau;\Delta) \simeq \begin{cases} 1-(\Delta/4\pi)\tau^2 & :\ \tau \ll \Delta^{-1}\,, \\ \exp(-\tau/2)+(4/\pi\Delta^2\tau)\sin(\tau\Delta/2) & :\ \tau \gg \Delta^{-1}\,. \end{cases} \qquad \text{(B.4.5)}$$

したがって，時間域

$$1/\Delta \ll \tau/2 \ll \log\Delta \qquad \text{(B.4.6)}$$

において指数函数的崩壊則 (2.3.2) が成り立つ．

$$\mathcal{A}(\tau;\Delta) \simeq \mathcal{A}(\tau;\infty) = \exp(-\tau/2)\,, \qquad \text{(B.4.7)}$$

$$\Gamma = \Gamma_0 = -2\,\Im\,\tilde{E}/h\,. \qquad \text{(B.4.8)}$$

かくて，準基底状態の崩壊率は固有値問題 (B.2.2) を条件 (B.2.3), (B.2.4), (B.2.5) のもとで解きさえすれば求められることが分かった*5．この計算を適正 WKB 法を用いて行うと公式 (2.4.5) が得られる．

---

*4　$\{A(E)\}^{-2}$ の代わりに $\{A(E)\}^{-p}$, $p>1$ でもよい．

*5　ただし，準定常波は規格化不可能であって量子力学的状態を表さず，それ自体に物理的意味はない．

C 汎函数微分

函数を変数とする函数は汎函数と呼ばれる．式 (2.6.12) で定義される S がその例であって，q における S の値が $S[q]$ である．汎函数を論ずる際には，函数 q と，τ における q の値 $q(\tau)$ とを明確に区別する[*1]．変数[*2] q は式 (2.6.13) で定義される函数空間 $\mathcal{F}_\infty$ に属するものとする．S は "$\mathcal{F}_\infty$ を定義域とする汎函数" であるといわれる．

準備として N 変数函数 $\mathcal{S}(q_1, q_2, \cdots, q_N)$ の偏微分を思い出そう．勝手な $r_1, r_2, \cdots, r_N$ に対し

$$\mathcal{S}(q_1+r_1, q_2+r_2, \cdots, q_N+r_N) - \mathcal{S}(q_1, q_2, \cdots, q_N) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_r^n \mathcal{S}(q_1, q_2, \cdots, q_N) \tag{C.0.1}$$

と書くことができる．ただし $\delta_r^n \mathcal{S}(\cdots)$ は左辺を $r_1, \cdots, r_n$ で Taylor 展開した n 次の項を表す．r_j を δq_j と書き換え，$\delta_{\delta q}^n \mathcal{S}(\cdots)$ を単に $\delta^n \mathcal{S}(\cdots)$ と書くことにすれば，周知の通り

$$\delta^1 \mathcal{S}(q_1, q_2, \cdots, q_N) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \mathcal{S}(q_1, q_2, \cdots, q_N)}{\partial q_j} \delta q_j \,, \tag{C.0.2}$$

$$\delta^2 \mathcal{S}(q_1, q_2, \cdots, q_N) = \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 \mathcal{S}(q_1, q_2, \cdots, q_N)}{\partial q_j \partial q_k} \delta q_j \delta q_k \,, \tag{C.0.3}$$

$$\cdots\cdots\cdots \,.$$

あらかじめ偏導函数を知っていれば，これは $\delta^n \mathcal{S}(\cdots)$ の定義式である．または，

---

*1　$S[q]$ のことを $S[q(\tau)]$ と書く文献が散見されるが，これは好ましくない．$S[q]$ は τ の値によって変わるような代物ではない．

*2　正式には "変函数"．

(C. 0. 1) と (C. 0. 2), (C. 0. 3), ⋯ をもって，偏導函数の定義と見ることもできる．

後者の見方を N 変数函数から汎函数に拡張することにより，汎函数微分が以下のように定義される．r は $\mathcal{F}_\infty$ に属する勝手な函数であるとし，式 (C. 0. 1) にならって次のように書こう．

$$S[q+r]-S[q]=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_r^n S[q]\,. \qquad \text{(C. 0. 4)}$$

$\delta_r^n S[q]$ は函数 r について n 次の項を表す．$\delta_r^1 S[q]$ は次の形に書かれるはずである．

$$\delta_r^1 S[q]=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\ \{\tau \text{ の函数}\}r(\tau). \qquad \text{(C. 0. 5)}$$

右辺の $\{\tau$ の函数$\}$ を $\delta S[q]/\delta q(\tau)$ なる記号で表し，これを汎導函数[*3](functional derivative) と呼ぶ．同様に $\delta_r^2 S[q]$ は次の形に書かれるはずである．

$$\delta_r^2 S[q]=\frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\,\{\tau \text{ と } \tau' \text{ の函数}\}r(\tau)r(\tau')\,. \qquad \text{(C. 0. 6)}$$

右辺の $\{\tau$ と τ' の函数$\}$ を $\delta^2 S[q]/\delta q(\tau)\delta q(\tau')$ なる記号で表し，これを第 2 階汎導函数と呼ぶ．高次項についても同様．以下，r を δq と書き換え，

$$\delta^n S[q]:=\delta_{\delta q}^n S[q] \qquad \text{(C. 0. 7)}$$

と定義する．$\delta^n S[q]$ は "$S[q]$ の第 n 変分 (n-th variation)" と呼ばれる．以上をまとめると

$$\delta^1 S[q]=:\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\ \frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau)}\delta q(\tau)\,, \qquad \text{(C. 0. 8)}$$

$$\delta^2 S[q]=:\frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\ \int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\ \frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(\tau)\delta q(\tau')}\delta q(\tau)\delta q(\tau')\,, \qquad \text{(C. 0. 9)}$$

$$\cdots\cdots\cdots.$$

等号が := でなく =: であることに注意されたい．(C. 0. 4) と (C. 0. 7), (C. 0. 8), ⋯ をもって汎導函数を定義したのである．式 (C. 0. 8) は，(C. 0. 2) における添字 j を連続変数 τ で置き換え，それに応じて和を積分に置き換えたものと見

*3　むしろ導汎函数というべきかもしれない．正式には "変分導函数"(variational derivative) と呼ばれる．

ることができる．記号 $\delta S[q]/\delta q(\tau)$ は，この形式的対応を示唆すべく導入されたのである．もちろん，これは形式的対応であって，(C.0.2) の連続極限として (C.0.8) が導かれたわけではない．ともあれ，この対応を念頭に置き，汎導函数 $\delta S[q]/\delta q(\tau)$ を求めることを汎函数 S を微分するという[*4]．

$\delta S[q]/\delta q(\tau)$ もまた q の汎函数である (と同時に，τ の函数でもある)．したがって，その汎函数微分が定義される．これについて次の性質がが成立する．

$$\frac{\delta}{\delta q(\tau)}\left(\frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau')}\right)=\frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(\tau)\delta q(\tau')}\,. \tag{C.0.10}$$

左辺は $\delta S[q]/\delta q(\tau')$ の汎導函数を表し，右辺は式 (C.0.9) で定義された第 2 階汎導函数である．ちなみに，函数 q が与えられれば，勝手な τ に対し $q(\tau)$ が定まる．つまり，各 τ について $q(\tau)$ は q の汎函数である．

$$q(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau'\ \delta(\tau-\tau')q(\tau')\,. \tag{C.0.11}$$

ゆえに

$$\frac{\delta q(\tau')}{\delta q(\tau)}=\delta(\tau'-\tau)\,. \tag{C.0.12}$$

式 (2.6.12) で定義される S の汎導函数を計算しよう．

$$\begin{aligned}
&S[q+r]-S[q]\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\left[\frac{1}{2}\{\dot q(\tau)+\dot r(\tau)\}^2-\frac{1}{2}\{\dot q(\tau)\}^2+V(q(\tau)+r(\tau))-V(q(\tau))\right]\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\{\dot q(\tau)\dot r(\tau)+V'(q(\tau))r(\tau)\}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau[\{\dot r(\tau)\}^2+V''(q(\tau))\{r(\tau)\}^2]\\
&\quad+\frac{1}{3!}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau V'''(q(\tau))\{r(\tau)\}^3+\cdots\,,
\end{aligned} \tag{C.0.13}$$

$$V'(q(\tau)):=\left.\frac{dV(q)}{dq}\right|_{q=q(\tau)},\ \cdots\,. \tag{C.0.14}$$

式 (C.0.13) 右辺の最初の積分は，$\dot r$ を含む項を部分積分すれば，(C.0.5) の形になる[*5]．したがって

*4　(C.0.8) 式右辺末尾の $\delta q(\tau)$ は $q(\tau)$ とは独立な量である．$\delta q(\tau)$ は函数 δq の τ における値であって，混乱を招く恐れがあれば $(\delta q)(\tau)$ と書くべきものである．

*5　$q, r\in\mathcal{F}_\infty$ を用いる．

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau)} = -\ddot{q}(\tau) + V'(q(\tau))\,. \tag{C.0.15}$$

同じく第 2 の積分は次の形になる．

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\ r(\tau)\mathcal{D}_\tau^{[q]} r(\tau)\,, \quad \mathcal{D}_\tau^{[q]} := -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q(\tau))\,. \tag{C.0.16}$$

記号 $\mathcal{D}_\tau^{[q]}$ は，$\mathcal{D}$ が τ に関する微分演算子であり，かつ，q の汎函数であることを表す．これを無理矢理 (C.0.6) の形に書いて

$$\frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(\tau)\delta q(\tau')} = \delta(\tau - \tau')\mathcal{D}_\tau^{[q]}\,. \tag{C.0.17}$$

同様の議論により

$$\frac{\delta^3 S[q]}{\delta q(\tau)\delta q(\tau')\delta q(\tau'')} = \delta(\tau - \tau')\delta(\tau - \tau'')V'''(q(\tau))\,. \tag{C.0.18}$$

次に汎函数の変数自体が汎函数という場合を考えてみよう．x の汎函数 $\tilde{S}[x]$ に q の汎函数 $x^{[q]}$ を代入したものを $S[q]$ と書こう．

$$S[q] := \tilde{S}[x^{[q]}]\,. \tag{C.0.19}$$

これは汎々函数*6とでも呼ぶべきものであり，q の汎函数である．$x^{[q]}$ は q の汎函数であると同時に τ の函数でもあるから，$x^{[q]}$ の τ における値を $x^{[q]}(\tau)$ で表す．すると次の微分法が成り立つ．

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau'\, \left.\frac{\delta \tilde{S}[x]}{\delta x(\tau')}\right|_{x = x^{[q]}} \frac{\delta x^{[q]}(\tau')}{\delta q(\tau)}\,. \tag{C.0.20}$$

函数 q は函数空間 $\mathcal{F}_\infty$ の点 q と呼ばれる．ある特別の点 Q において汎導函数が 0 になったとしよう．すなわち

$$\left.\frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau)}\right|_{q = Q} = 0\,. \tag{C.0.21}$$

この条件を満たす Q は S の**停留点** (stationary point) と呼ばれ，$S[Q]$ は S の**停留値**と呼ばれる．

---

*6　正式には合成汎函数と呼ばれる．

D スピンを巡る断章

D.1 スピン演算子

大きさ S のスピン演算子*1を $\{\hat{S}_a \mid a=1, 2, 3\}$ と書く.

$$[\hat{S}_a, \hat{S}_b] = i\sum_c \varepsilon_{abc}\hat{S}_c \,, \quad \sum_a \hat{S}_a^2 = S(S+1)\,. \tag{D.1.1}$$

足 $a, b, \cdots$ は，実験室の 3 次元 Euclid 空間 $\mathbf{E}^3$ とは無関係である．$\mathbf{E}^3$ の回転行列(付録 A)を用いて，スピン演算子ヴェクトル $\hat{\boldsymbol{S}}$ を次式で定義する*2.

$$\hat{\boldsymbol{S}} := \sum_a \sum_j \hat{S}_a \mathcal{R}_{aj} \boldsymbol{e}_j \,. \tag{D.1.2}$$

$\hat{\boldsymbol{S}}$ は演算子であり，かつ $\mathbf{E}^3$ のヴェクトルである．特に断らぬ限り $\mathcal{R}_{aj}=\delta_{aj}$ と採り，これを標準選択と呼ぶ．磁性体の異方性や磁場の効果を考慮する際には，$\boldsymbol{e}_j\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ という形の演算子($\hat{\boldsymbol{S}}$ の $\boldsymbol{e}_j$ 成分)が現れ，これを通してスピン空間と $\mathbf{E}^3$ が関連付けられる．この事情を強調したい場合には，$\hat{S}_j := \boldsymbol{e}_j\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ という記号を使う．したがって，標準選択を採るものとして，$\hat{S}_x=\hat{S}_1, \cdots$. もちろん，$\{\hat{S}_a\}$ は (D.1.1) によって規定されているだけであって，3 個の演算子のうちのどれを $\hat{S}_1$ と呼ぶかは勝手であり，$\hat{S}_x, \cdots$ というのも単なる呼称の問題に過ぎないともいえよう．しかし，本来，スピン演算子は $\mathbf{E}^3$ と無関係に定義されるものであるから，抽象的な足 $a, b, \cdots$ と，$\mathbf{E}^3$ に固定された足 $x, y, \cdots$ を概念的に区別

---

*1　無次元量とする.

*2　$\mathcal{R}_{aj}$ は $\mathcal{R}_{kj}$ の左足 k を a で置き換えたものであり，足の意味は異なるが数学的には同じものである．つまり $\mathcal{R}_{1j}=\mathcal{R}_{xj}, \cdots$.

しておく方がよい．

勝手な単位ヴェクトル $\boldsymbol{m}$ と実数 θ に対し，

$$\hat{R}(\theta\boldsymbol{m}) := \exp(-i\theta\boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}) \qquad \text{(D.1.3)}$$

は，**スピン回転演算子**と呼ばれる．その Hermite 共役を $\hat{R}^{\dagger}(\theta\boldsymbol{m})$ と書くと，

$$\hat{R}^{\dagger}(\theta\boldsymbol{m})\hat{\boldsymbol{S}}\hat{R}(\theta\boldsymbol{m}) = \mathcal{R}(\theta\boldsymbol{m})\hat{\boldsymbol{S}}\,. \qquad \text{(D.1.4)}$$

もちろん，右辺の $\mathcal{R}(\theta\boldsymbol{m})$ は (A.1.2) に従って $\{\boldsymbol{e}_j\}$ に作用する．

D.2　スピン S のスピン 1/2 分解

大きさ S のスピン演算子 $\hat{\boldsymbol{S}}$ を扱うための補助として，互いに独立な $2S$ 個のスピン演算子 $\{\hat{\boldsymbol{s}}^{(\alpha)}\,|\,\alpha=1,2,\cdots,2S\}$ を導入する．各スピン $\hat{\boldsymbol{s}}^{(\alpha)}$ の大きさは 1/2 とする．それらの和すなわち全スピン $\hat{\boldsymbol{T}} := \sum_{\alpha} \hat{\boldsymbol{s}}^{(\alpha)}$ に対し次の定理が成り立つ．

定理 D.2.1［スピン 1/2 分解定理］　勝手な 3 変数多項式 $f(\boldsymbol{x}) \equiv f(x_1, x_2, x_3)$ に対し[*3]，

$$f(\hat{\boldsymbol{T}}) = 0 \implies f(\hat{\boldsymbol{S}}) = 0\,. \qquad \square$$

(もちろん逆は不成立: 例えば $\hat{\boldsymbol{S}}^2 = S(S+1) \neq \hat{\boldsymbol{T}}^2$.) この定理は直観的に自明であろう．そもそもスピン S の粒子(あるいは磁性体)を実体的にとらえれば，それはスピン 1/2 の素粒子の集合体である[*4]．したがって，集合体がスピン S として歩調を揃える場合には，その性質は抽象的なスピン S にも当てはまる[*5]．

［証明］　蛇足ながら，証明をいささか厳めしく述べておく．$\hat{\boldsymbol{S}}$ の作用する $2S+1$ 次元 Hilbert 空間を $\mathcal{H}_S$ とする(式 (3.3.20) 参照)．一方，$\hat{\boldsymbol{s}}^{(\alpha)}$ の作用する 2 次元 Hilbert 空間を

$$\mathcal{H}_{1/2}^{(\alpha)} := \mathcal{S}pan\left\{\left|\pm\frac{1}{2}\right\rangle^{(\alpha)}\right\} \qquad \text{(D.2.1)}$$

とすれば，$\hat{\boldsymbol{T}}$ はこれらの直積空間 $\tilde{\mathcal{H}}$ に作用する．

---

*3　x_1, x_2, x_3 の可換性は仮定しない．例えば $x_1x_2 \neq x_2x_1$．

*4　“Wigner は行列に関する定理に出会ったら必ず 2×2 行列で試した” という話を聞いたことがある．Wigner の脳内でも常に $S=(1/2)\times 2S$ であったのではなかろうか．

*5　個々のスピンが顔を出すような関係式，例えば $S=1$ の場合に成立する式 $\hat{\boldsymbol{T}}^2 - \frac{3}{2} - 2\hat{\boldsymbol{s}}^{(1)}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}^{(2)} = 0$ は，$f(\hat{\boldsymbol{T}})=0$ という形にまとめられないので，定理 D.2.1 とは無縁である．

$$\tilde{\mathcal{H}} := \bigotimes_{\alpha} \mathcal{H}_{1/2}^{(\alpha)} = \tilde{\mathcal{H}}_S \oplus \tilde{\mathcal{H}}_{S-1} \oplus \cdots . \qquad (\text{D. 2. 2})$$

右辺は既約分解であり，$\tilde{\mathcal{H}}_S$ はスピン S の部分空間である．したがって

$$\begin{aligned} f(\hat{\boldsymbol{T}}) = 0 &\Longleftrightarrow f(\hat{\boldsymbol{T}})\tilde{\mathcal{H}} = 0 \\ &\Longrightarrow f(\hat{\boldsymbol{T}})\tilde{\mathcal{H}}_S = 0 \\ &\Longleftrightarrow f(\hat{\boldsymbol{S}})\mathcal{H}_S = 0 \iff f(\hat{\boldsymbol{S}}) = 0 . \end{aligned} \qquad (\text{D. 2. 3})$$

ただし $\underline{\hat{A}\tilde{\mathcal{H}} = 0}$ の意味は，$\underline{{}^{\forall}|\psi) \in \tilde{\mathcal{H}}$ に対して $\hat{A}|\psi) = 0}$ である*6．最後から 2 番目の同値性は，$\tilde{\mathcal{H}}_S$ 上における $\hat{\boldsymbol{T}}$ の作用が $\mathcal{H}_S$ 上における $\hat{\boldsymbol{S}}$ の作用と同型であることによる．すなわち，

$$|S) := \prod_{\alpha} \left| \frac{1}{2} \right\rangle^{(\alpha)} ,$$

$$|m-1) := \{S(S+1) - m(m-1)\}^{-1/2}\ \hat{T}_{-}|m) \qquad (\text{D. 2. 4})$$

を用いて

$$\tilde{\mathcal{H}}_S = \mathcal{S}pan\{|m) \mid m = -S, -S+1, \cdots, S\} . \qquad (\text{D. 2. 5})$$

したがって $\tilde{\mathcal{H}}_S$ と $\mathcal{H}_S$ の間に位相因子も含めた 1 対 1 対応が成り立つ．

$$|\psi) \equiv \sum_m c_m |m) \longleftrightarrow \sum_m c_m |m\rangle \equiv |\psi\rangle , \qquad (\text{D. 2. 6})$$

$$f(\hat{\boldsymbol{T}})|\psi) \longleftrightarrow f(\hat{\boldsymbol{S}})|\psi\rangle . \qquad (\text{D. 2. 7})$$

∎

上記の証明の副産物として，(D. 2. 6) と (D. 2. 7) から次の定理が得られる．

定理 D. 2. 2［行列要素のスピン 1/2 分解定理］ $|\psi_n\rangle$ $(n = 1, 2)$ を $\mathcal{H}_S$ の勝手な状態とする．(D. 2. 6) によって $|\psi_n\rangle$ に対応する $|\psi_n)$ $(\in \tilde{\mathcal{H}}_S)$ を用いれば，

$$\langle \psi_2 | f(\hat{\boldsymbol{S}}) | \psi_1 \rangle = (\psi_2 | f(\hat{\boldsymbol{T}}) | \psi_1) .$$

□

これは単なる対応ではなく等式である．多項式 $f(\boldsymbol{x})$ の次数を p とすると，高々 p 個のスピン 1/2 演算子の積について当該の行列要素を計算すれば右辺が分かり，したがって左辺が求められる．

定理 D. 2. 1 の典型的応用例として，次式を証明しよう．

---

*6　$\tilde{\mathcal{H}}$ に属する状態を丸ケット $|\cdots)$ で表す．

$$f_1(\hat{\boldsymbol{S}}) = f_2(\hat{\boldsymbol{S}})\,. \tag{D.2.8}$$

ただし $f_\nu(\boldsymbol{x})$ $(\nu=1,2)$ はそれぞれ指数函数の積であり，各指数は $\boldsymbol{x}$ に関して線形であるとする．この場合には $f_\nu(\hat{\boldsymbol{T}})$ が因数分解できる．

$$f_\nu(\hat{\boldsymbol{T}}) = \prod_\alpha f_\nu(\hat{\boldsymbol{s}}^{(\alpha)}) \;:\; \nu = 1,2\,. \tag{D.2.9}$$

したがって，スピン 1/2 に対して (D.2.8) を証明しさえすれば，それを掛け合わせて $f_1(\hat{\boldsymbol{T}})=f_2(\hat{\boldsymbol{T}})$ が得られる．あとは，$f\equiv f_1-f_2$ に対して定理 D.2.1 を適用することにより，任意の S に対して (D.2.8) が証明される．

D.3　スピン解纏定理

回転演算子 $\hat{R}\equiv\exp(-i\theta\hat{S}_2)$ を状態 $|S\rangle$ に作用させることを考えてみよう．$\hat{R}$ を Taylor 展開したりして直接に計算するのは厄介である．そこで $2i\hat{S}_2=\hat{S}_+-\hat{S}_-$ に着目する．仮に $\hat{S}_\pm$ が互いに可換ならば，$\hat{R}$ は $\exp(\theta\hat{S}_-/2)\exp(-\theta\hat{S}_+/2)$ に等しい．ところが，$\hat{S}_+|S\rangle=0$. したがって $\hat{R}|S\rangle$ は $\exp(\theta\hat{S}_-/2)|S\rangle$ に帰着され，計算労力が大幅に節約される．これに示唆を得て次のように予想してみる．

$$\exp(-i\theta\hat{S}_2) = \exp(\lambda\hat{S}_-)\hat{\mathcal{M}}\exp(-\lambda\hat{S}_+)\;, \tag{D.3.1}$$

ただし λ は θ の函数，また $\hat{\mathcal{M}}$ は $\hat{S}_3$ と θ の函数．$\hat{S}_\pm$ の非可換性から $\hat{S}_3$ による因子 $\hat{\mathcal{M}}$ が生ずることは充分に予想されよう．これは一種の**整列化** (normal ordering) であり，左辺にて纏 (もつ) れて(entangled) いた $\hat{S}_\pm$ を巧く解纏 (ほぐ) して(disentangle) 右端と左端に振り分けたわけである．上式を逆に解けば

$$\hat{\mathcal{M}} = \exp(-\lambda\hat{S}_-)\exp(-i\theta\hat{S}_2)\exp(\lambda\hat{S}_+)\,. \tag{D.3.2}$$

この右辺が $\hat{S}_3$ のみの函数であること (そのように λ を採り得ること) が証明できれば，予想 (D.3.1) は正しかったことになり，目的が達せられる．

一般の S について (D.3.2) の右辺を素手で計算しようとしても，腕力家はいざ知らず，たちまち行き詰まることであろう．幸いにして，前節のスピン 1/2 分解の考え方を使えば，$S=1/2$ についての計算だけで済む．以下 $S=1/2$ とし，スピン演算子を小文字の $\hat{\boldsymbol{s}}$ で表す．恒等式 $(2\hat{s}_2)^2=1$, $\hat{s}_\pm^2=0$ を用いて

$$\hat{\mathcal{M}} = (1-\lambda\hat{s}_-)\{\cos(\theta/2)-(\hat{s}_+-\hat{s}_-)\sin(\theta/2)\}(1+\lambda\hat{s}_+)$$

$$= \{1+(\lambda-t)(\hat{s}_+-\hat{s}_-)-\lambda(\lambda-2t)\hat{s}_-\hat{s}_+\}c\ , \qquad (D.3.3)$$

$$t \equiv \tan(\theta/2)\ , \quad c \equiv \cos(\theta/2)\ . \qquad (D.3.4)$$

ここで $\hat{s}_-\hat{s}_+ = 1/2-\hat{s}_3$ に着目すると，右辺が $\hat{s}_3$ のみの函数となるためには $\lambda = t$ と採ればよいことが分かり，

$$\hat{\mathcal{M}} = \left\{1+t^2\left(\frac{1}{2}-\hat{s}_3\right)\right\}c = \left(\frac{1}{2}+\hat{s}_3\right)c+\left(\frac{1}{2}-\hat{s}_3\right)\frac{1}{c}. \qquad (D.3.5)$$

右辺の $1/2\pm\hat{s}_3$ は，$\hat{s}_3$ の固有値 $\pm 1/2$ の部分空間への射影子である．つまり，$2\hat{s}_3$ の値 ± 1 に応じて $\hat{\mathcal{M}}$ は c または $1/c$ となる．したがって

$$\hat{\mathcal{M}} = \exp(2\hat{s}_3 \log c)\ . \qquad (D.3.6)$$

かくて次の定理が証明された．

定理 D.3.1［スピン解縺定理*7予備］

$$\exp(-i\theta\hat{S}_2) = \exp(\lambda\hat{S}_-)\exp\left\{2\hat{S}_3\log\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right\}\exp(-\lambda\hat{S}_+)\ , \qquad (D.3.7)$$

$$\lambda \equiv \tan(\theta/2)\ . \qquad (D.3.8)\ \square$$

左辺のスピン演算子は $\hat{S}_2$ つまり $\boldsymbol{e}_y\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ である．$\boldsymbol{e}_y$ を xy 面内の勝手な方向

$$\boldsymbol{m} \equiv -\boldsymbol{e}_x\sin\phi+\boldsymbol{e}_y\cos\phi \qquad (D.3.9)$$

に一般化しよう．そのためにはスピンを $\boldsymbol{e}_z$ 軸回りに ϕ だけ回せばよい．$\hat{R} \equiv \hat{R}(\phi\boldsymbol{e}_3)$ に対して

$$\hat{R}\hat{S}_2\hat{R}^\dagger = \boldsymbol{m}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}\ , \quad \hat{R}\hat{S}_+\hat{R}^\dagger = e^{-i\phi}\hat{S}_+\ , \quad \hat{R}\hat{S}_3\hat{R}^\dagger = \hat{S}_3 \qquad (D.3.10)$$

となることに着目し，(D.3.7) に左右から $\hat{R}, \hat{R}^\dagger$ を掛けて次の定理を得る*8．

定理 D.3.2［スピン解縺定理 (spin disentanglement theorem)］

$$\hat{R}(\theta\boldsymbol{m}) \equiv \exp\{i\theta(\hat{S}_1\sin\phi-\hat{S}_2\cos\phi)\}$$

$$= \exp(\mu\hat{S}_-)\exp\left\{2\hat{S}_3\log\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right\}\exp(-\mu^*\hat{S}_+)\ , \qquad (D.3.11)$$

$$\mu \equiv e^{i\phi}\tan(\theta/2)\ . \qquad (D.3.12)\ \square$$

---

*7 ほぐしていり

*8 もっと高踏的な証明を好まれる向きには，例えば $SL(2, \boldsymbol{C})$ の表現論を用いる方法もある．しかし，ことの本質は上述のように $SU(2)$ すなわちスピン 1/2 で済む話であって，高踏的証明も実は同じ内容を難しげに言っているに過ぎない．

定数 μ は南極からの**立体射影** (stereographic projection) でお馴染みの量である．$\hat{R}(\theta \boldsymbol{m})$ を $|-S\rangle$ に作用させる場合などには，上とは逆の順序に整列させる方が好都合である．(D.3.11) にてスピンを $\boldsymbol{e}_x$ 軸の回りに π だけ回せば

定理 D.3.3 ［スピン逆解纏定理］

$$\hat{R}(\theta \boldsymbol{m}) = \exp(-\mu^* \hat{S}_+) \exp\left\{-2\hat{S}_3 \log\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\right\} \exp(\mu \hat{S}_-) \ . \quad \text{(D.3.13)}$$ □

D.4　スピン・コヒーレント状態

スピンを直観的に理解すべく，スピンが $\boldsymbol{n}$ 方向に向いた状態をうまく作ってみたい．まず

$$\boldsymbol{e}_z \cdot \hat{\boldsymbol{S}} |S\rangle = S|S\rangle \quad \text{(D.4.1)}$$

に着目する．勝手な単位ヴェクトル $\boldsymbol{n}$ は，$\boldsymbol{e}_z$ を

$$\boldsymbol{m} := \frac{\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}|} = -\boldsymbol{e}_x \sin\phi_{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{e}_y \cos\phi_{\boldsymbol{n}} \quad \text{(D.4.2)}$$

の回りに $\theta_{\boldsymbol{n}}$ だけ回転して得られる．ただし，$\theta_{\boldsymbol{n}}$, $\phi_{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{e}_z$ を極軸として測った $\boldsymbol{n}$ の方位角である．したがって，(D.1.4) により

$$\boldsymbol{e}_z \cdot \hat{\boldsymbol{S}} = \hat{R}^\dagger(\theta_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{m}) \boldsymbol{n} \cdot \hat{\boldsymbol{S}} \hat{R}(\theta_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{m}) \ . \quad \text{(D.4.3)}$$

これを (D.4.1) に代入すれば (3.3.21) が得られる．ただし

$$|\boldsymbol{n}\rangle := \hat{R}(\theta_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{m})|S\rangle \quad \text{(D.4.4)}$$

$$= \exp(-\zeta_{\boldsymbol{n}}^* \hat{S}_+ + \zeta_{\boldsymbol{n}} \hat{S}_-)|S\rangle\,, \quad \zeta_{\boldsymbol{n}} \equiv \frac{1}{2}\theta_{\boldsymbol{n}} \exp(i\phi_{\boldsymbol{n}})\,. \quad \text{(D.4.5)}$$

特に $S=1/2$ ならば，$\hat{R}(\theta_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{m})$ を Taylor 展開して

$$|\boldsymbol{n}\rangle = \cos\frac{\theta_{\boldsymbol{n}}}{2}\left|\frac{1}{2}\right\rangle + e^{i\phi_{\boldsymbol{n}}} \sin\frac{\theta_{\boldsymbol{n}}}{2}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle \ : \ S = 1/2\ . \quad \text{(D.4.6)}$$

$\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{e}_z$ に平行の場合には $\boldsymbol{m}$(すなわち $\phi_{\boldsymbol{n}}$) が定義されないので，式 (D.4.4) も意味を失う．しかし，(D.4.5) は $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_z$ ($\theta_{\boldsymbol{n}}=0$) に対しても意味を成し，これを定義とみなせば

$$|\boldsymbol{e}_z\rangle := |S\rangle\,. \quad \text{(D.4.7)}$$

以上により，$|\boldsymbol{n}\rangle$ は任意の $\boldsymbol{n}\,(\neq -\boldsymbol{e}_z)$ に対して定義され，かつ $\boldsymbol{n}$ の連続函数

である．南極 $(-\boldsymbol{e}_z)$ だけは除外せざるを得ないが，これは球面がつむじ曲がりである以上，致し方ない．$|\boldsymbol{n}\rangle$ は**スピン・コヒーレント状態** (spin coherent state)，正確には北極型スピン・コヒーレント状態 (spin coherent state with north-pole convention) と呼ばれる．$|S\rangle$ すなわち $|\boldsymbol{e}_z\rangle$ を回転して作られたからである[*9]．

式 (3.3.21) より明らかな通り $\langle\boldsymbol{n}|\ \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}\ |\boldsymbol{n}\rangle = S$. ところが勝手な $\boldsymbol{l}\,(\perp\boldsymbol{n})$ について，状態 $|\boldsymbol{n}\rangle$ における $\boldsymbol{l}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}$ の期待値は 0 である．ゆえに，次式の意味でスピンに対する古典的描像が再現される．

$$\langle\boldsymbol{n}|\ \hat{\boldsymbol{S}}\ |\boldsymbol{n}\rangle = S\boldsymbol{n}\,. \tag{D.4.8}$$

また，(D.4.4) と定理 D.3.2 より

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{n}\rangle &= (1+|\mu_{\boldsymbol{n}}|^2)^{-S}\exp(\mu_{\boldsymbol{n}}\hat{S}_-)|S\rangle \\ &= \left(\frac{2}{1+|\mu_{\boldsymbol{n}}|^2}\right)^S \sum_m b_{Sm}^{1/2}\,(\mu_{\boldsymbol{n}})^{S-m}\ |m\rangle\,.\end{aligned} \tag{D.4.9}$$

$\mu_{\boldsymbol{n}}$ は (D.3.12) にて $(\theta,\phi)=(\theta_{\boldsymbol{n}},\phi_{\boldsymbol{n}})$ と置いたものであり，b_{Sm} は (規格化された) 2 項係数 (3.3.38) である．これを用いると

$$\int d^2\boldsymbol{n}\ |\boldsymbol{n}\rangle\langle\boldsymbol{n}| = 1\,, \tag{D.4.10}$$

$$d^2\boldsymbol{n} := (2S+1)\frac{d\Omega_{\boldsymbol{n}}}{4\pi} = \frac{\hbar d\Omega_{\boldsymbol{n}}}{2\pi(S+1/2)^{-1}\hbar}\,, \tag{D.4.11}$$

ただし $d\Omega_{\boldsymbol{n}}$ は単位球面の面素[*10]．つまり $\{|\boldsymbol{n}\rangle\,|\,\boldsymbol{n}\in S^2\}$ は基底系をなす．(D.4.11) 式右辺第 2 項は，通常の粒子の相空間における面素 $dpdq/2\pi\hbar$ との対応を強調した書き方であり，$dpdq$ の次元が $\hbar$ であることに留意して分子に $\hbar$ を配してある．これを見れば，粒子の場合の $\hbar$ に相当する量が $(S+1/2)^{-1}\hbar$ であることが分かる．

さて (D.4.9) より

$$\langle\boldsymbol{n}'|\boldsymbol{n}\rangle = (\Delta_{\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}})^{2S}, \tag{D.4.12}$$

---

*9 代わりに，$|-S\rangle$ を回転して同様の状態を作ることもできる．これは，南極型 (south-pole convention) と形容される．

*10 方位角を使えば $\sin\theta_{\boldsymbol{n}}d\theta_{\boldsymbol{n}}d\phi_{\boldsymbol{n}}$ であるが，球面上の各点を民主的に扱うには不適切．

$$\Delta_{n'n} := \frac{1+\mu'^*\mu}{(1+|\mu'|^2)^{1/2}(1+|\mu|^2)^{1/2}} = c'c+\tilde{s}'^*\tilde{s}\,, \qquad \text{(D.4.13)}$$

$$\mu \equiv \mu_n\,, \quad c \equiv \cos(\theta_n/2)\,, \quad \tilde{s} \equiv e^{i\phi_n}\sin(\theta_n/2)\,. \qquad \text{(D.4.14)}$$

$\boldsymbol{n}'$ に対する各記号に $'$ を付けた．したがって，

$$|\Delta_{n'n}|^2 = 1-\frac{|\mu'-\mu|^2}{(1+|\mu'|^2)(1+|\mu|^2)}$$
$$= 1-\frac{1}{4}|\boldsymbol{n}'-\boldsymbol{n}|^2 = \frac{1}{2}(1+\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n})\,. \qquad \text{(D.4.15)}$$

つまり $\{|\boldsymbol{n}\rangle\}$ は直交系でなく，過剰基底系の一種である．また，$|\boldsymbol{n}\rangle$ と直交するのは $|-\boldsymbol{n}\rangle$ だけである．式 (D.4.12) を見れば，これは何も (D.4.9) を使って仰々しく計算せずとも簡単に出るはず，と思い当たるに違いない．その通り，前節のスピン 1/2 分解の考え方に従い，$S=1/2$ の場合を計算して，その結果を $2S$ 乗すれば済む．$S=1/2$ なら (D.4.6) より直ちに (D.4.12) が得られる．以上の結果から，特に $\boldsymbol{n}'\approx\boldsymbol{n}$ の場合には

$$\langle\boldsymbol{n}'|\boldsymbol{n}\rangle \simeq \exp\left\{-\frac{S}{4}|\boldsymbol{n}'-\boldsymbol{n}|^2\right\}$$
$$\times\exp[-iS\{(\phi_{n'}-\phi_n)(1-\cos\theta_n)$$
$$+\frac{1}{2}(\theta_{n'}-\theta_n)(\phi_{n'}-\phi_n)\sin\theta_n\}]. \qquad \text{(D.4.16)}$$

右辺冒頭の Gauss 型因子が重要であって，これは，$|\boldsymbol{n}'-\boldsymbol{n}| \lesssim S^{-1/2}$ なる範囲の $(\boldsymbol{n}', \boldsymbol{n})$ に対して $\langle\boldsymbol{n}'|\boldsymbol{n}\rangle$ が無視できないことを表す．

公式 (D.4.8) を非対角要素に一般化してみよう．簡略化のため，次の記号を用いる[*11]．

$$\ll \hat{A} \gg \equiv \langle\boldsymbol{n}'|\hat{A}|\boldsymbol{n}\rangle/\langle\boldsymbol{n}'|\boldsymbol{n}\rangle. \qquad \text{(D.4.17)}$$

この計算もスピン 1/2 分解の考え方を使えばやさしい．(D.2.6) の意味での対応

$$\prod_\alpha |\boldsymbol{n}\rangle^{(\alpha)} \longleftrightarrow |\boldsymbol{n}\rangle \;:\; |\boldsymbol{n}\rangle^{(\alpha)} \equiv c\left|\frac{1}{2}\right\rangle^{(\alpha)}+\tilde{s}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle^{(\alpha)} \qquad \text{(D.4.18)}$$

---

*11　左辺に付すべき添字 $\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{n}$ を略．

に注意して定理 D.2.2 を使うと

$$\langle \boldsymbol{n}'|\hat{S}_3|\boldsymbol{n}\rangle = \sum_{\alpha''}\left\{\prod_{\alpha'}{}^{(\alpha')}\langle \boldsymbol{n}'|\right\}\ \hat{s}_3^{(\alpha'')}\ \left\{\prod_{\alpha}|\boldsymbol{n}\rangle^{(\alpha)}\right\}$$

$$= (\Delta_{\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}})^{2S-1}\sum_{\alpha}{}^{(\alpha)}\langle \boldsymbol{n}'|\hat{s}_3^{(\alpha)}|\boldsymbol{n}\rangle^{(\alpha)}\,. \qquad \text{(D.4.19)}$$

すべての α は同等であるから，最後の和は，1 個の α の寄与を $2S$ 倍したものに等しい．ゆえに

$$\ll \hat{S}_3 \gg = S(c'c-\tilde{s}'^*\tilde{s})/\Delta_{\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}}\,. \qquad \text{(D.4.20)}$$

同様にして

$$\ll \hat{S}_+ \gg = 2Sc'\tilde{s}/\Delta_{\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}}\,, \quad \ll \hat{S}_- \gg = 2S\tilde{s}'^*c/\Delta_{\boldsymbol{n}'\boldsymbol{n}}\,. \qquad \text{(D.4.21)}$$

したがって，特に $\boldsymbol{n}'\approx\boldsymbol{n}$ の場合には

$$\ll \hat{\boldsymbol{S}} \gg = S\boldsymbol{n}\{1+\mathcal{O}(|\boldsymbol{n}'-\boldsymbol{n}|)\}\,. \qquad \text{(D.4.22)}$$

あるいは，これを (D.4.16) と合わせて

$$\langle \boldsymbol{n}'|\hat{\boldsymbol{S}}|\boldsymbol{n}\rangle = S\boldsymbol{n}\{1+\mathcal{O}(S^{-1/2})\}\langle \boldsymbol{n}'|\boldsymbol{n}\rangle\,. \qquad \text{(D.4.23)}$$

$\hat{\boldsymbol{S}}$ の積の行列要素も同様に計算することができる．例えば 2 次式の場合，勝手な複素ヴェクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ を導入して結果をまとめれば

$$\ll (\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{S}})(\boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} \gg = \left(1-\frac{1}{2S}\right)\ll \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} \gg\ll \boldsymbol{b}\cdot\hat{\boldsymbol{S}} \gg$$

$$+\frac{i}{2}\ll (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\hat{\boldsymbol{S}} \gg +\frac{S}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\,, \qquad \text{(D.4.24)}$$

$$\boldsymbol{a}\equiv\sum_j a_j\boldsymbol{e}_j\,, \quad \boldsymbol{b}\equiv\sum_j b_j\boldsymbol{e}_j\ :\ a_j,b_j\in\mathbf{C}\,. \qquad \text{(D.4.25)}$$

あとがき(筆者独白)

本書の執筆を3年前に引き受けたとき，壮大な計画を夢見た.

・内容は3部構成とする．概念的側面に重点を置いた序・多自由度系の崩壊の量子論に関する破・そして個々の系における巨視的自由度の抽出と環境の性格付けを詳論する急.

・最初の1年間で草稿を書く．2年目は，身近の院生諸君に草稿を配って徹底的に批判してもらうと同時に，古今東西の関連文献に当たって内容を吟味し補足したうえで完成する.

ところがである，草稿を手書きでまとめるのに丸2年を費やし，LaTeXなるものを使って(むしろ，に使われて)間違いだらけの清書ができたときには，すでに約束の脱稿期日を過ぎること9カ月，しかもできたのは序と破のみであり，それだけで優に300頁を越える分量になっていた．普段から自戒している積もりであった下手の長談義ぶりを発揮してしまったわけである．これを三分の二に縮小しようと試みたが，そうすると至るところ舌足らずの内容になる．やむを得ず破と急は諦め，当初予定の第1部のみを残すこととした．演習問題についても，模範解答なるものを載せるつもりであったが，能力および時間不足で解けそうにないことが判明し，紙数の都合という口実のもとに省略した．こうして壮大な計画は夢に終り，予定より1年遅れて息も絶え絶えの脱稿となった．猫が苦笑していることであろう.

巨視的トンネル現象の理論の片鱗に触れたのは，ポスドク時代にSussex大学の橋廊兼茶飲場で，液体^{3}Heの超流動相間の転移がトンネル効果で起こる可能性についてLeggett教授と話し合った(結果は否定的)ときであった．その際に教授から教わったのが文献[14]であった．もう二昔も前になる．しかし猫との付き合いもまだまだこれからという感を深くしたこの3年間であった.

1997年8月27日　仙台・青葉山にて

高木　伸

参考文献

[1] Leggett, A. J., Macroscopic Quantum Systems and the Quantum Theory of Measurement, Prog. Theor. Phys. Suppl. 69 (1980), 80.

Leggett 構想を提唱した論文．本書に関連した最も重要な論文である．

[2] Leggett, A. J., Quantum Mechanics at the Macroscopic Level, in *Chance and Matter*, edited by Souletie, J., Vannimenus, J. and Stora, R., Elsevier Science Publishers, 1987, p. 395.

文献[1]の内容と，その後の展開が分かりやすく解説されている．

以下，主として本書の内容を補う解説書の類を紹介する．

[3] Kagan, Yu and Leggett, A. J. (eds), Quantum Tunnelling in Condensed Media, North-Holland, 1992.

多自由度系におけるトンネル現象の実験および理論の諸側面に関する専門的な解説集．

[4] Weiss, U., Quantum Dissipative Systems, World Scientific, 1993.

環境効果一般について詳しく論じられている．

[5] Gunther, L. and Barbara, B. (eds.), Quantum Tunneling of Magnetization - QTM '94, Kluwer Academic Publishers, 1995.

磁性体における巨視的トンネル現象が本格的に研究されるようになった初期の研究成果がまとめられている．

[6] Eckern, U., Schön, G. and Ambegaokar, V., Phys. Rev. B30 (1984), 6419.

磁束の量子力学 (第 3.1 節) の微視的基礎付けに関して標準的に引用される論文．

[7] 栗原進, 巨視的トンネル効果（栗原進編, トンネル効果, 丸善, 1994）, p. 137.

[8] 栗原進・小森文夫, 微小接合のトンネル効果（福山秀敏編, メゾスコピック系の物理, 丸善, 1996）, p. 189.

[9] 多々良源, 巨視的量子トンネル現象（福山秀敏・山田耕作・安藤恒也編, 大学院物性物理 3, 講談社, 1996）, p. 253.

以上三書には，Josephson 接合系や微小磁性体を題材として，巨視的自由度の抽出や環境効果の解析に関する進んだ理論的技術の解説があり，最近の実験結果も紹介されている．文献[9]には磁壁のトンネル現象についての記述がある．

実験は日進月歩であり，本書執筆中の 3 年間にも次々と新しいデータが出されてきた．迷った挙句，本書では実験データの紹介を断念した．上記文献に紹介されていない最近の実験のうち代表的なものを挙げておこう．

［10］ Rouse, R., Han, S. and Lukens, J. E., Phys. Rev. Lett. 75 (1995), 1614; 76 (1996), 3404. (SQUID)

［11］ Satoh, T., Morishita, M., Ogata, M., Katoh, S., Hatakeyama, K. and Takashima, M., Phys. Rev. Lett. 69 (1992), 335; Physica B197 (1994), 397. (^{3}He–^{4}He 混合液)

［12］ Friedman, J. R., Sarachik, M. P., Tejada, J. and Ziolo, R., Phys. Rev. Lett. 76 (1996), 3830. (微小磁性体 [巨大磁性分子])

本書の主題と密接に関連した話題として固体中における μ 粒子の量子拡散問題がある．文献[3], p. 37，または分かりやすい解説として

［13］ Kondo, J., Quantum Diffusion of Positive Muons in Solids, in *Perspectives of Meson Science*, edited by Yamazaki, T., Nakai, K. and Nagamine, K., Elsevier Science Publishers, 1992, p. 137.

言うまでもなく筆者の知識は，独自に創出したことなど微々たるもので，ほとんどが借物である．講義を聴き本を読み研究会で討論を聞き，いつしか理解したというよりはすっかり慣れてしまった，出典不明の知識が多い．本書執筆に当たっての引用文献として，どこまで発掘すべきか，迷うところである．紙数の都合もあり，以下，執筆に際し直接手元に置いて参照または引用した文献のうち主たるもの（すでに挙げたものは除く）を，感謝の意をこめて列挙するに留めたい．

［14］ Lifshitz. I. M. and Kagan, Yu, Sov. Phys. JETP35 (1972) 206. (第 3 章)

［15］ Nakamura, T., Kanno, Y. and Takagi, S., Phys. Rev. B51 (1995), 8446; Prog. Theor. Phys. 93 (1995), 1013. (第 3 章)

［16］ Leggett, A. J., Chakravarty, S., Dorsey, A. T., Fisher, M. P. A., Garg, A., and Zwerger, W., Rev. Mod. Phys. 59 (1987), 1. (第 4, 6 章)

［17］ Fujikawa, K., Iso, S., Sasaki, M and Suzuki, H., Phys. Rev. B46 (1992), 10295. (第 6 章)

［18］ Caldeira, A. O. and Leggett, A. J., Ann. Phys. 149 (1983), 374; Erratum 153 (1984), 445(E). (第 5, 7, 8 章)

［19］ Leggett, A. J. and Garg, A., Phys. Rev. Lett. 54 (1985), 857. (第 9 章)

［20］ Tesche, C. D., Phys. Rev. Lett. 64 (1990), 2358. (第 9 章)

索　引

A

粗い密度演算子　189
attempt frequency　57
泡　56, 68
泡ポテンシャル　61

B

場の演算子　74
微視的自由度　7
Born-Oppenheimer 型表現　168
Born-Oppenheimer 型基底系　167
Born-Oppenheimer 基底系　174
Bose-Einstein 凝縮　8
bounce　38, 156
bounce action　39
膨縮運動　58

C

Caldeira-Leggett 仮定　170
Caldeira-Leggett の公式　163
Caldeira-Leggett 有効作用　160
遅延 Green 函数　123
遅延反作用　125
遅延解　132
遅延抵抗函数　127, 130
直積空間　194
超伝導電流密度　46
Coleman-Hepp 環境　109
Coleman-Hepp 模型　109, 118
counter term　133
crossover temperature　31

D

第一種巨視的量子現象　8
第二種巨視的量子現象　8
断熱ポテンシャル　167
断熱的環境　154
dc-SQUID　183
decoherence　5, 98
dephasing　98
disconnectivity　10

E

entangled state　4
演算子順序　64
Euclid 時間　39, 156
Euclid 作用汎函数　39, 156

F

Fermi の黄金律　139

G

Gamow 公式　198
Gauss 過程　101
ゲージ変換　46
Ginzburg-Landau 秩序場　44

H

配位空間　80
薄膜近似　69, 72
跳返　38, 156
跳返作用　39, 162
汎函数　201
汎函数微分　202
^{3}He–^{4}He 混合液　55
非線形 Klein-Gordon 場　66
非線形 Schrödinger 場　70
拉状態　134
homogeneous nucleation　56
崩壊状態　29, 35
崩壊の量子論　195
崩壊率　29, 33

I

一次相転移　63
インコヒーレント　97
instanton　41
位相攪乱　98, 104, 112, 149
位相攪乱因子　104, 108

J

磁場侵入長　47
時間反転　37
時間反転対称性　91, 132
時間の矢　37
磁束 Hamiltonian　49
磁束ポテンシャル　49
磁束量子　47
自由トンネル現象　16
Josephson 電流　44
Josephson 結合エネルギー　49
Josephson の電流・位相関係式　44
Josephson の加速方程式　47
Josephson 接合　43
乗移温度　31
寿命　29
準安定井戸　16
準安定状態　16, 28, 56
準基底状態　28, 199
準古典的状況　21
準束縛状態　199
準定常波　34, 197

K

過飽和混合液　55
回転波近似　105
回転対称性　91
過剰基底系　82, 212
核形成　57
確率過程　101
環境周波数分布函数　125
干渉性消失　5, 98
観測の問題　4
完全性　82
経度表現　82, 85
経度基底系　82
傾斜二連井戸　23
kink　68
基底エネルギー分裂　24, 32
コヒーレンス　97
コヒーレント　97
コヒーレント状態　97, 135, 154
混合　11, 98
古典崩壊率　30
Kramers 縮退　91
空洞形成　64
虚時間　39
巨視系 Hamiltonian　14
巨視性の目安　7
巨視的実在論　3, 175
巨視的自由度　14
巨視的確定性　175
巨視的可峻別　3, 176
巨視的量子現象　10
巨視的線形結合　3
共鳴エネルギー　199
共鳴波　199
共鳴トンネル　31, 53, 80
共通一次模型　121

L

Langevin 方程式　48, 130
Leggett-Garg 不等式　6, 176
Leggett 構想　6

M

Markov 近似　131
Meissner 効果　47
Möbius 境界条件　82
縺状態　4, 174, 187
MQC　14
MQC 状況　51, 78
MQP　10
MQT　14
MQT 状況　51, 78
無侵襲可測性　175

N

内因性核形成　56
猫性度　10, 52, 63
二状態系　23
二状態近似　23
二連間隙　1
偽の真空　68
二相分離　55

O

Ohm 型環境　126
折曲　68

P

Poincaré cycle　36
Poincaré 輪廻　36
Poincaré 再帰時間　36
Poincaré 再帰定理　37
Poincaré 周期　36, 128
ポテンシャル繰込　133

Q

QIMDS　4, 176
quantum indeterminacy time　116

R

Rayleigh-Plesset 模型　58
rf-SQUID　43, 183
臨界過飽和度　63
臨界核　56
量子崩壊　14
量子崩壊率　31
量子核形成　58
量子核形成率　62
量子共鳴振動　14
量子 Langevin 方程式　130
量子性の目安　20
量子 Zeno 効果　113
量子 Zeno 領域　35

S

散逸　98
SBS　22
Schrödinger の線形劇場　2
線形相互作用調和環境模型　119
先進解　132
洗濯板　51
真の真空　68
質量保存則　59, 71
障壁下作用　33
縮約された密度演算子　189
瞬子　41
集団自由度　7, 14, 122
周期井戸　78
素朴 WKB 法　33
双一次模型　121
相空間　81, 211
双たんこぶ坂　78
special tilted double well　41
spin disentanglement theorem　209
squeezed state　134
SQUID　43, 183
SSDW　22
スピン 1/2 分解　206
スピン解縺定理　209
スピン回転演算子　206
スピン・コヒーレント状態　81, 211
スピンポテンシャル　78

T

滞留確率　28
対称二連井戸　15, 21
単磁区磁石　75
たんこぶ坂　15, 21, 51
縦緩和時間　104
定常過程　101
停留値　204
停留点　40, 156, 204
転位　66
Tesche の思考実験　183
特殊対称二連井戸　22, 53

特殊たんこぶ坂 22, 53

U

打消項 133

V

van Hove 極限 109
virtual bound state 199
virtual ground state 28, 199

Y

横緩和時間 104
揺動力 130, 134
Young 型実験 1
有効 Euclid 作用汎函数 157

Z

雑音 134

高木　伸（たかぎ しん）

1946 年生まれ
1969 年東京大学理学部物理学科卒業
1974 年東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了
現 在　東北大学大学院理学研究科物理学専攻助教授
専 攻　理論物理学

巨視的トンネル現象　　新物理学選書

1997 年 11 月 25 日　第 1 刷発行

著 者　高木 伸（たかぎ しん）

発行者　大塚信一

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-02 東京都千代田区一ツ橋 2-5-5
電 話　案内 03-5210-4000

組版：ユニバーサル・アカデミー・プレス
印刷：法令印刷　表紙：錦印刷　製本：松岳社

ISBN4-00-007412-1　　Printed in Japan

新物理学選書

新しい物理学の脈動を伝える——自然の統一的理解を進めながら，研究のフロントを次々と拡大していく現代物理学．その発展の根幹には，新しい概念の創造と斬新な数学的手法の開発がある．この視点から今日もっとも重要で将来性の高いテーマを厳選し，各分野の第一人者が自由に書き下ろす．大学院生，研究者に真に役立つ新シリーズ．

（A5判上製，各巻平均200ページ）

共形場理論	江口　徹	
計算物理学の方法	宇川　彰	
量子異常	藤川和男	
ゲージ不変な重力理論	小玉英雄	
電子相関の物理	斯波弘行	
複雑な液体	土井正男	
*巨視的トンネル現象	高木　伸	240頁 本体6000円
量子ホール効果	吉岡大二郎	
非平衡パターンと乱流	佐野雅己	
*共形場理論と１次元量子系	川上則雄・梁成吉	256頁 本体6400円

＊は既刊